

3

दो-पर वाले रेखिक समीकरण युग्म

उदा. 1 अखिल मने गाँव के एक मेले में गई। वह एक-परखी की सवारी करना चाहती थी और हूपला खेलना चाहती थी। जितनी बार उसने हूपला खेल खेला उससे आधी बार उसने-परखी की सवारी की। यदि उसके बार की सवारी के लिए उसे 3 रु. तथा हूपला खेलने के लिए 4 रु. खर्च करने पड़े, तो आप कैसे ज्ञात करेंगे कि उसने कितनी बार-परखी की सवारी की और कितनी बार हूपला खेला, जबकि उसने इसके लिए कुल 20 रु. खर्च किए?

हल:

एक बार-परखी की सवारी \rightarrow 3 रुपये

एक बार हूपला \rightarrow 4 रुपये

कुल = 20 रुपये

माना अखिल ने x बार-परखी की सवारी की तथा y बार हूपला खेल खेला।

बीजे गणितीय \rightarrow
$$\begin{cases} 3x + 4y = 20 \rightarrow (1) \\ y = \frac{1}{2}x \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$ax + by + c = 0$$

चिन्ह $\rightarrow (x, y)$

$$3x + 4y = 20$$

$$x = 0,$$

$$3(0) + 4y = 20$$

$$4y = 20$$

$$y = \frac{20}{4} = 5$$

$(0, 5)$

$$y = 0, \quad 3x + 4(0) = 20$$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3}$$

$$y = 2, \quad 3x + 4(2) = 20$$

$$3x + 8 = 20$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

$(4, 2)$

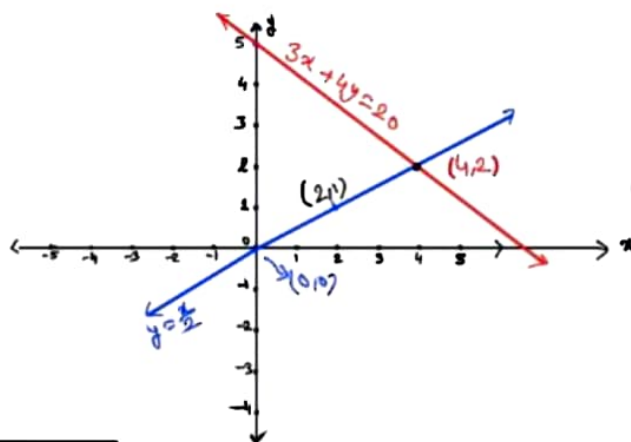
$$y = \frac{x}{2}$$

$$x = 0, \quad y = \frac{0}{2} = 0$$

$(0, 0)$

$$x = 2, \quad y = \frac{2}{2} = 1$$

$(2, 1)$



$$\begin{matrix} x = 4 \\ y = 2 \end{matrix} \rightarrow \underline{\underline{\text{उत्तर}}}$$

उत्तिच्छेदी रेखाएँ

उदा०-2 रोमिला एक स्टेजानरी की दुकान में गई और 3 रु में 2 पेंसिल तथा 3 रबड़ खरीदी। उसकी सहेली सोनाली ने रोमिला के पास नई तरह की पेंसिल और रबड़ देखी और उसने भी 18 रुपये में उसी तरह की 4 पेंसिल और 6 रबड़ खरीदी। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ग्राफीय [ज्यामितीय] रूपों में व्यक्त कीजिए।

⇒ रोमिला, 2 पेंसिल + 3 रबड़ → 3 रुपये
 सोनाली, 4 पेंसिल + 6 रबड़ → 18 रुपये

माना 1 पेंसिल का मूल्य x रुपये हैं।
 तथा 1 रबड़ का मूल्य y रुपये हैं।

$$2x + 3y = 3 \quad \text{--- (1)}$$

$$4x + 6y = 18 \quad \text{--- (2)}$$

$$2x + 3y = 3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 2(0) + 3y &= 3 \\ 3y &= 3 \\ y &= \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$(0, 1)$$

$$\begin{aligned} y = 1, \quad 2x + 3(1) &= 3 \Rightarrow 2x = 3 - 3 \\ 2x &= 0 \\ x &= \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$(0, 1)$$

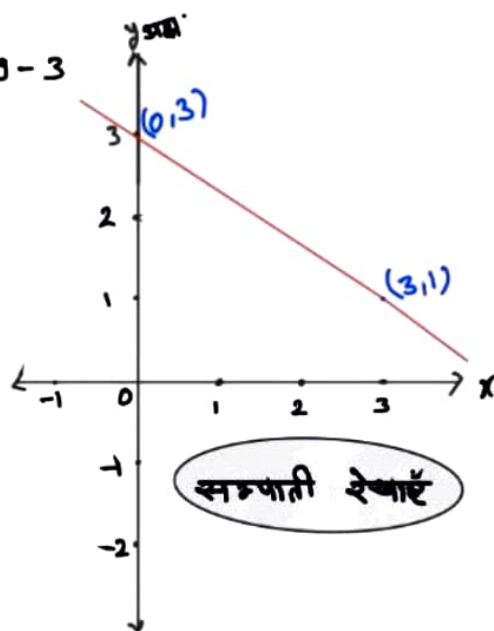
$$4x + 6y = 18 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 4(0) + 6y &= 18 \\ 6y &= 18 \\ y &= \frac{18}{6} = 3 \end{aligned}$$

$$(0, 3)$$

$$\begin{aligned} y = 1, \quad 4x + 6(1) &= 18 \\ 4x + 6 &= 18 \\ 4x &= 12 \\ x &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

$$(3, 1)$$



सम्पाती रेखाएँ

उदा०-3 दो रेल पटरियों, समीकरणों $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ द्वारा निरूपित की गई हैं। इस स्थिति को ज्यामितीय रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\Rightarrow x + 2y - 4 = 0 \quad (1) \quad 2x + 4y - 12 = 0$$

$$x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad 0 + 2y - 4 = 0$$

$$2y = 4$$

$$y = \frac{4}{2} = 2$$

$$(0, 2)$$

$$y = 0, \quad x + 2(0) - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$(4, 0)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad 2(0) + 4y - 12 = 0$$

$$0 + 4y - 12 = 0$$

$$4y = 12$$

$$y = \frac{12}{4} = 3$$

$$(0, 3)$$

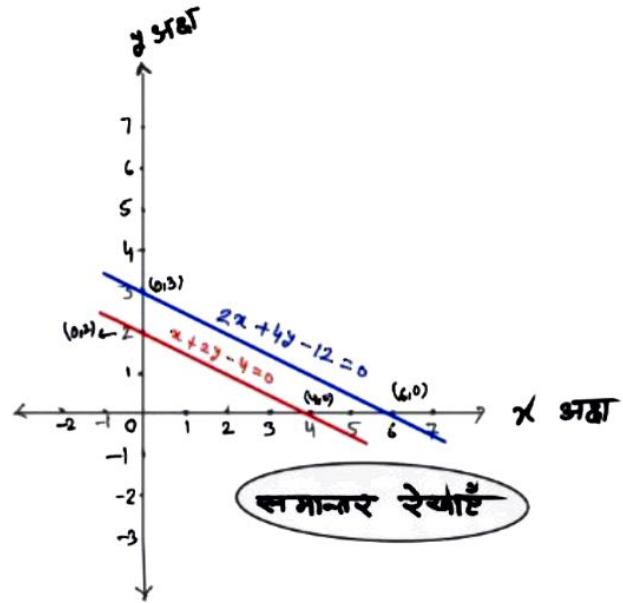
$$y = 0, \quad 2x + 4(0) - 12 = 0$$

$$2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

$$(6, 0)$$



प्रश्नावली 3.1

प्रश्न-1 आफताब अपनी पुत्री से कहता है, "सात वर्ष पूर्व में तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से तीन वर्ष बाद में तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊंगा।" इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

	वर्तमान आयु	7 वर्ष पूर्व आयु	3 वर्ष बाद आयु
आफताब	x वर्ष	$(x-7)$ वर्ष	$(x+3)$ वर्ष
पुत्री	y वर्ष	$(y-7)$ वर्ष	$(y+3)$ वर्ष

$$\Rightarrow x - 7 = 7(y - 7)$$

$$\Rightarrow x - 7 = 7y - 49$$

$$\Rightarrow x = 7y - 49 + 7$$

$$\Rightarrow x = 7y - 42 \quad (1)$$

$$x = 0, \quad 0 = 7y - 42$$

$$42 = 7y$$

$$y = \frac{42}{7} = 6$$

$$(0, 6)$$

$$y = 5, \quad x = 7(5) - 42$$

$$= 35 - 42$$

$$= -7$$

$$(-7, 5)$$

$$x + 3 = 3(y + 3)$$

$$\Rightarrow x + 3 = 3y + 9$$

$$\Rightarrow x = 3y + 9 - 3$$

$$\Rightarrow x = 3y + 6 \quad \text{--- (2)}$$

$$x = 0, \quad 0 = 3y + 6$$

$$3y = -6$$

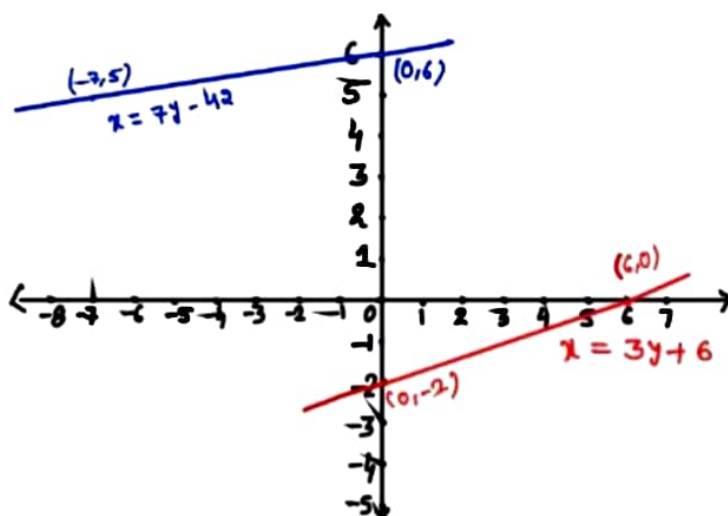
$$y = \frac{-6}{3}$$

$$y = -2 \quad (0, -2)$$

$$y = 0, \quad x = 3(0) + 6$$

$$x = 6$$

$$(6, 0)$$



उदाहरण-2 क्रिकेट टीम के एक कोच ने 3900 रुपये में 3 बल्ले तथा 6 गेंदे खरीदी। बाद में उसने एक और बल्ला तथा उसी प्रकार की 3 गेंदे 1300 रुपये में खरीदी। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

$$3900 \text{ रुपये} \Rightarrow 3 \text{ बल्ले} + 6 \text{ गेंदे}$$

$$1300 \text{ रुपये} \Rightarrow 1 \text{ बल्ला} + 3 \text{ गेंदे}$$

माना 1 बल्ले का मूल्य x रुपये है तथा एक गेंद का मूल्य y रुपये है।

$$3x + 6y = 3900 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + 3y = 1300 \quad \text{--- (2)}$$

$$3x + 6y = 3900 \Rightarrow$$

$$x = 100, \quad 3(100) + 6y = 3900$$

$$300 + 6y = 3900$$

$$6y = 3900 - 300$$

$$y = \frac{3600}{6}$$

$$= 600$$

$$(100, 600)$$

$$x = 300,$$

$$3(300) + 6y = 3900$$

$$900 + 6y = 3900$$

$$6y = 3900 - 900$$

$$6y = 3000$$

$$y = \frac{3000}{6} = 500$$

$$(300, 500)$$

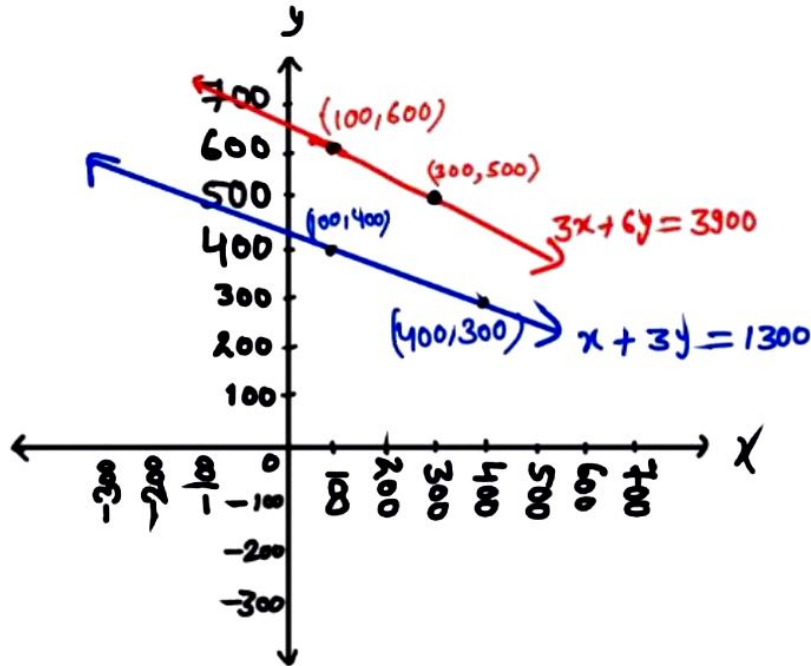
$$x + 3y = 1300 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 100, & 100 + 3y &= 1300 \\ & & 3y &= 1300 - 100 \\ & & 3y &= 1200 \\ & & y &= \frac{1200}{3} = 400 \end{aligned}$$

$$(100, 400)$$

$$\begin{aligned} y &= 300, & x + 3(300) &= 1300 \\ & & x + 900 &= 1300 \\ & & x &= 1300 - 900 \\ & & x &= 400 \end{aligned}$$

$$(400, 300)$$



प्रश्न-3 2 Kg सेब और 1 Kg अंगूर का मूल्य किसी दिन 160 रुपये था। एक महीने बाद 4 Kg सेब और 2 Kg अंगूर का मूल्य 300 रुपये हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} 2 \text{ Kg सेब} + 1 \text{ Kg अंगूर} &\Rightarrow 160 \text{ रुपये} \\ 4 \text{ Kg सेब} + 2 \text{ Kg अंगूर} &\Rightarrow 300 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

माना 1 Kg सेब का मूल्य x रुपये है तथा 1 Kg अंगूर का मूल्य y रुपये है।

$$\begin{aligned} 2x + y &= 160 & \text{--- (1)} \\ 4x + 2y &= 300 & \text{--- (2)} \end{aligned}$$

$$2x + y = 160 \Rightarrow$$

$$x = 0, 2(0) + y = 160$$

$$y = 160$$

$$(0, 160)$$

$$y = 0, 2x + 0 = 160$$

$$2x = 160$$

$$x = \frac{160}{2}$$

$$x = 80$$

$$(80, 0)$$

$$4x + 2y = 300 \Rightarrow$$

$$x = 0, 4(0) + 2y = 300$$

$$2y = 300$$

$$y = 150$$

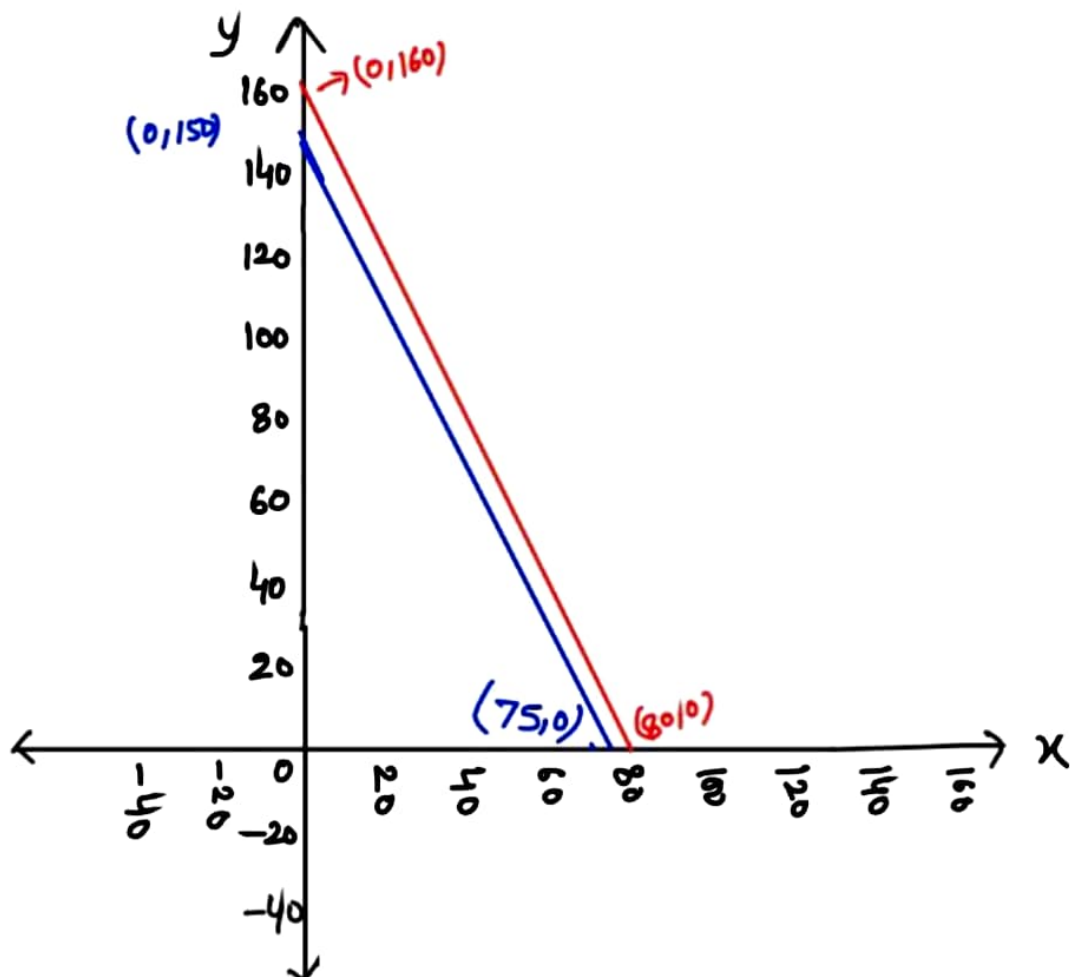
$$(0, 150)$$

$$y = 0, 4x + 2(0) = 300$$

$$4x = 300$$

$$x = \frac{300}{4} = 75$$

$$(75, 0)$$



उदाहरण - 4 ग्राफ द्वारा जाँच कीजिए कि समीकरण युग्म $x + 3y = 6$ और $2x - 3y = 12$ संगत हैं। यदि ऐसा है, तो उन्हें ग्राफ द्वारा हल कीजिए

$$x + 3y = 6 \Rightarrow$$

$$x = 0, 0 + 3y = 6$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3} = 2$$

$$(0, 2)$$

$$y = 0, x + 3(0) = 6$$

$$x = 6$$

$$(6, 0)$$

$$2x - 3y = 12 \Rightarrow$$

$$x = 0, 2(0) - 3y = 12$$

$$-3y = 12$$

$$y = \frac{12}{-3} = -4$$

$$(0, -4)$$

$$y = 0, 2x - 3(0) = 12$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

$$(6, 0)$$

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow$$

$$x + 3y - 6 = 0$$

$$2x - 3y - 12 = 0$$

$$a_1 = 1, b_1 = 3$$

$$c_1 = -6$$

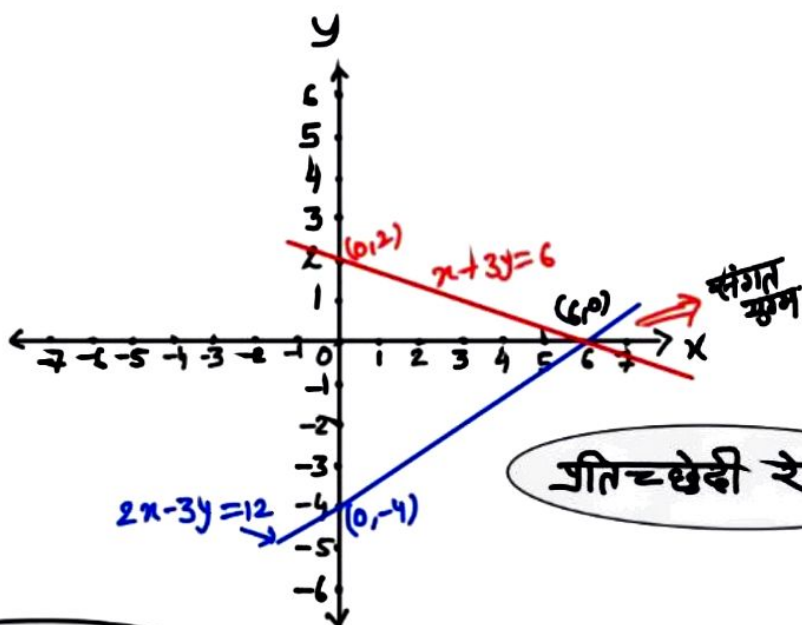
$$a_2 = 2, b_2 = -3$$

$$c_2 = -12$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$$

;

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{-3} \Rightarrow -1$$



प्रतिच्छेदी रेखाएँ

$$\text{हल} \rightarrow x = 6$$

$$y = 0$$

उदाहरण - 5 ग्राफ द्वारा जात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म का हल नहीं है, अद्वितीय हल है अथवा अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

$$5x - 8y + 1 = 0, \quad 3x - \frac{24}{5}y = \frac{3}{5} = 0$$

हल :

$$5x - 8y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 3, \quad 5(3) - 8y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 15 - 8y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16 = 8y$$

$$\Rightarrow y = \frac{16}{8} = 2$$

$$(3, 2)$$

$$x = 11, \quad 5(11) - 8y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 55 - 8y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 56 - 8y = 0$$

$$\Rightarrow 56 = 8y$$

$$\Rightarrow y = \frac{56}{8} = 7$$

$$(11, 7)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15x - 24y + 3}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 15x - 24y + 3 = 0$$

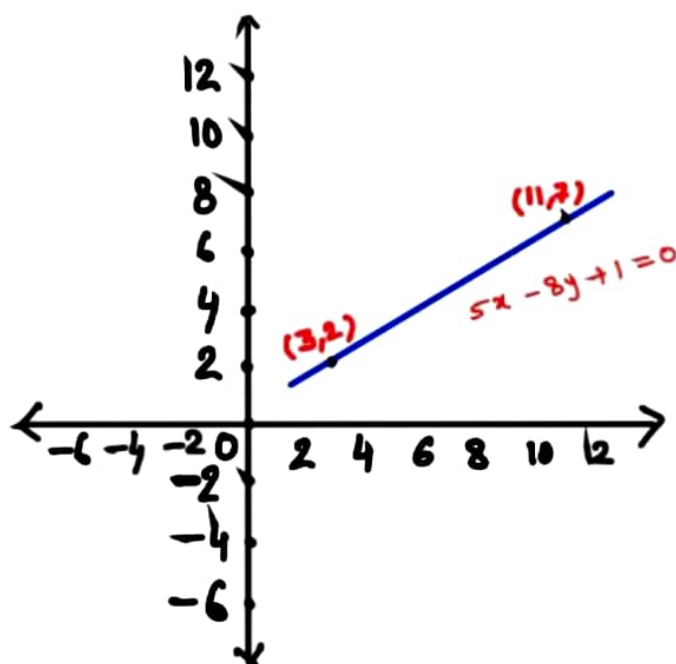
$$\Rightarrow 3(5x - 8y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 8y + 1 = 0$$

$$5x - 8y + 1 = 0$$

$$(3, 2)$$

$$(11, 7)$$



सम्पाती रेखाएँ

उदाहरण - 6 चम्पा एक सेल में कुछ पेंट और स्फर्ट खरीदने गई। जब उसकी सहेलियों ने पूछा कि पुल्के के कितने नग खरीदे, तो उसने उत्तर दिया, "स्फर्ट की संख्या खरीदी गई पेंटों की संख्या की दो गुनी से दो कम है। स्फर्ट की संख्या खरीदी गई पेंटों की संख्या की चार गुनी से भी चार कम है।" सहेलियों की यह जानने के लिए सहायता कीजिए कि चम्पा ने कितनी पेंट और स्फर्ट खरीदी।
 \Rightarrow माना स्फर्ट की संख्या x है तथा पेंटों की संख्या y है।

$$x = 2y - 2 \quad - (1)$$

$$x = 4y - 4 \quad - (2)$$

$$x = 2y - 2 \Rightarrow$$

$$x=0, \quad 0 = 2y - 2$$

$$2 = 2y$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{2} = 1$$

$$(0, 1)$$

$$y=0, \quad x = 2(0) - 2$$

$$x = -2$$

$$(-2, 0)$$

$$x = 4y - 4 \Rightarrow$$

$$x=0, \quad 0 = 4y - 4$$

$$4 = 4y$$

$$y = \frac{4}{4} = 1$$

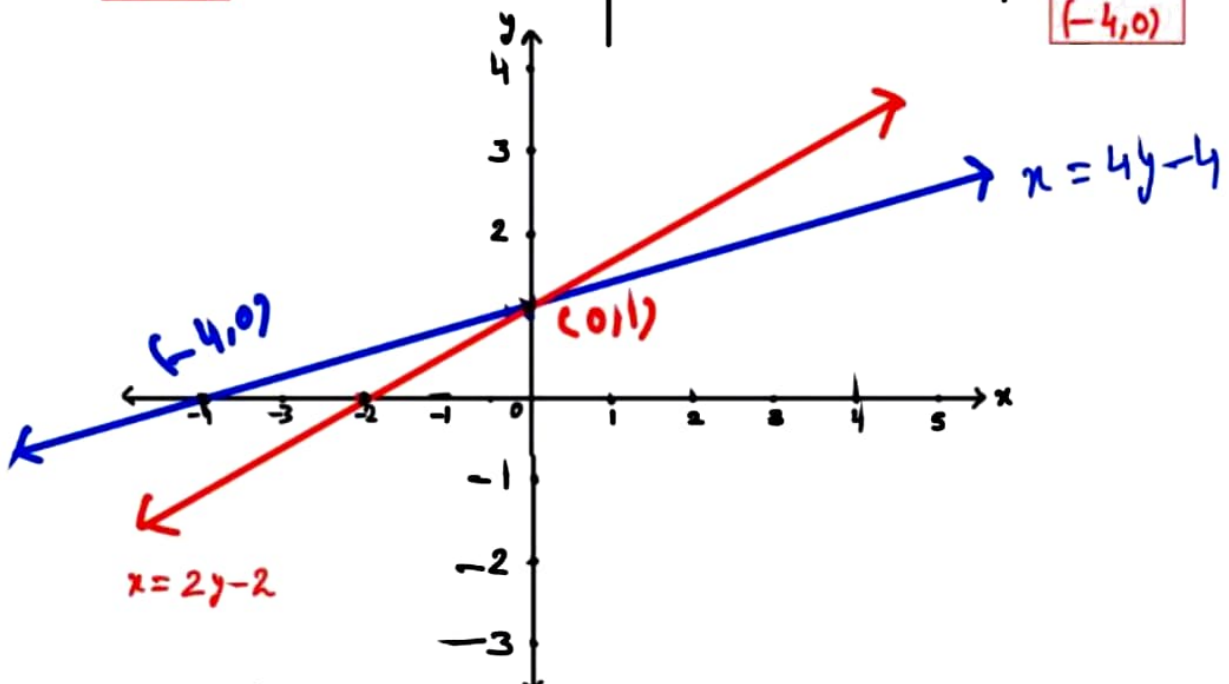
$$(0, 1)$$

$$y=0, \quad x = 4(0) - 4$$

$$= 0 - 4 = -4$$

$$x = -4$$

$$(-4, 0)$$



अतः स्फर्ट की संख्या = 0
 पेंट की संख्या = 1

प्रश्नावली - 3.2

प्रश्न-1 (i) कक्षा 10 के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहेली उलियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो उलियोगिता में भाग लिए लड़कों और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना लड़कों की संख्या x तथा लड़कियों की संख्या y है।

$$x + y = 10 \quad \text{--- (1)}$$

$$y = x + 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$x + y = 10 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad 0 + y = 10 \\ \Rightarrow y = 10$$

$$(0, 10)$$

$$y = 0, \quad x + 0 = 10 \\ \Rightarrow x = 10$$

$$(10, 0)$$

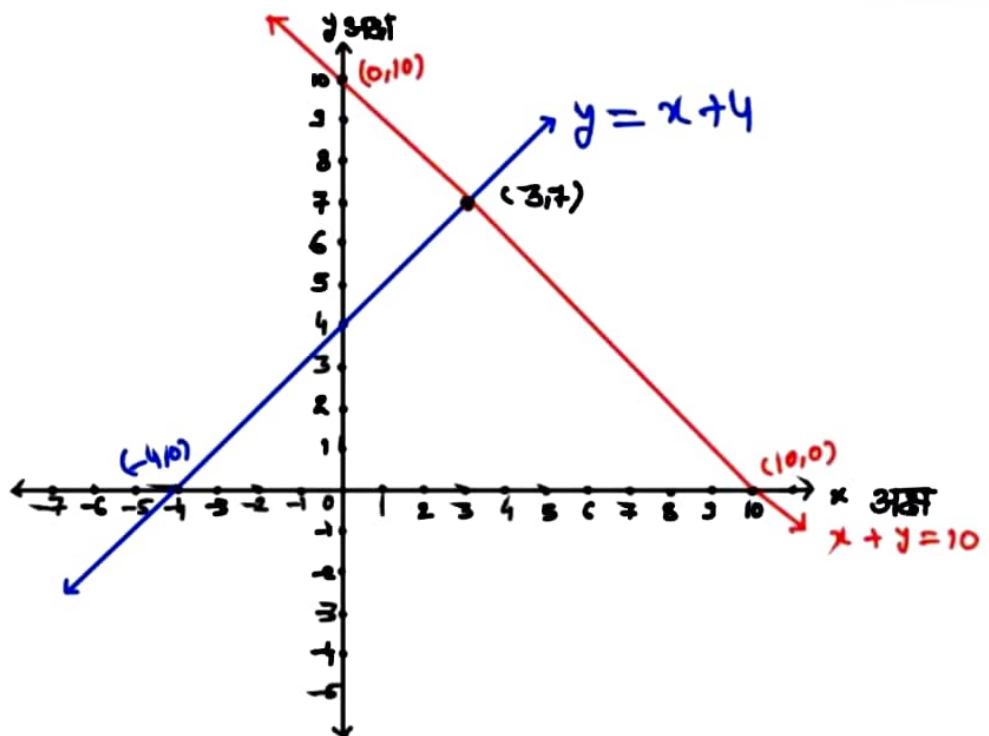
$$y = x + 4 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad y = 0 + 4 \\ y = 4$$

$$(0, 4)$$

$$y = 0, \quad 0 = x + 4 \\ x = -4$$

$$(-4, 0)$$



अतः लड़कों की संख्या $(x) = 3$
लड़कियों की संख्या $(y) = 7$

प्रश्न-1 (ii) 5 पेंसिल तथा 4 कलमों का मूल्य 50 रुपये है जबकि, 4 पेंसिल और 5 कलमों का मूल्य 46 रुपये है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात करें।

हल: माना 1 पेंसिल का मूल्य x रुपये तथा 1 कलम का मूल्य y रुपये है।

$$5x + 4y = 50 \quad \text{--- (1)}$$

$$4x + 5y = 46 \quad \text{--- (2)}$$

$$5x + 7y = 50 \Rightarrow$$

$$x = 3, \quad 5(3) + 7y = 50$$

$$\Rightarrow 15 + 7y = 50$$

$$\Rightarrow 7y = 35$$

$$\Rightarrow y = \frac{35}{7} = 5$$

$$(3, 5)$$

$$y = 0, \quad 5(x) + 7(0) = 50$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

$$(10, 0)$$

$$7x + 5y = 46 \Rightarrow$$

$$x = 8, \quad 7(8) + 5y = 46$$

$$56 + 5y = 46$$

$$5y = -10$$

$$y = -2$$

$$(8, -2)$$

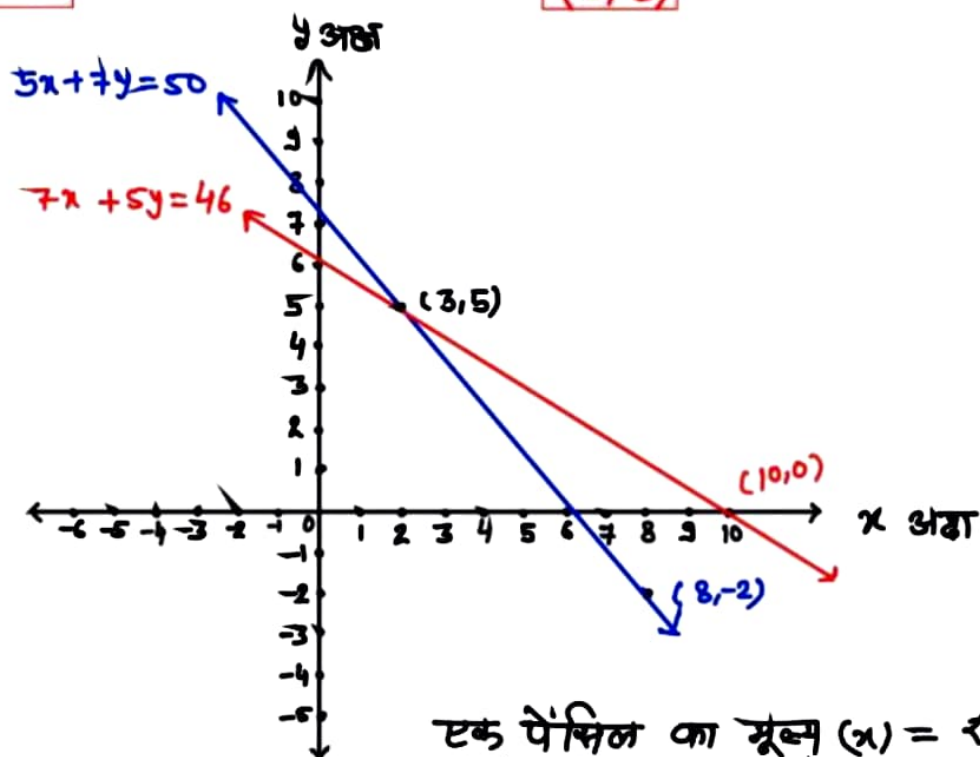
$$y = 5, \quad 7x + 5(5) = 46$$

$$7x + 25 = 46$$

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7} = 3$$

$$(3, 5)$$



एक पेंसिल का मूल्य (x) = ₹ 3
एक कलम का मूल्य (y) = ₹ 5

उदाहरण-2

(i) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



प्रतिच्छेदी रेखाएँ

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



समान्तर रेखाएँ

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



संमती रेखाएँ

$$ax + by + c = 0$$

(i) $a_1 = 5, b_1 = -4, c_1 = 8$
 $a_2 = 7, b_2 = 6, c_2 = -9$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\therefore प्रतिच्छेदी रेखाएँ

(ii) $a_1 = 9, b_1 = 3, c_1 = 12$
 $a_2 = 18, b_2 = 6, c_2 = 24$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

\therefore सम्पाती रेखाएँ

(iii) $a_1 = 6, b_1 = -3, c_1 = 10$
 $a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 9$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{10}{9}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

\therefore समान्तर रेखाएँ

प्रश्न-3 (i) $3x + 2y = 5, 2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8, 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7, 9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11, -10x + 6y = -22$

(v) $\frac{1}{3}x + 2y = 8, 2x + 3y = 12$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



प्रतिच्छेदी रेखाएँ
(संगत)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



समान्तर रेखाएँ
(असंगत)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



सम्पाती रेखाएँ
(संगत)

(i) $3x + 2y = 5, 2x - 3y = 7$
 $3x + 2y - 5 = 0, 2x - 3y - 7 = 0$

$$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = -5$$

$$a_2 = 2, b_2 = -3, c_2 = -7$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-3}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \therefore \text{संगत समीकरण युग्म}$$

$$(ii) \quad 2x - 3y = 8, \quad 4x - 6y = 9$$

$$2x - 3y - 8 = 0, \quad 4x - 6y - 9 = 0$$

$$a_1 = 2, \quad b_1 = -3, \quad c_1 = -8$$

$$a_2 = 4, \quad b_2 = -6, \quad c_2 = -9$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \therefore \text{असंगत समीकरण युग्म}$$

$$(iii) \quad \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7, \quad 9x - 10y = 14$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y - 7 = 0, \quad 9x - 10y - 14 = 0$$

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad b_1 = \frac{5}{3}, \quad c_1 = -7$$

$$a_2 = 9, \quad b_2 = -10, \quad c_2 = -14$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3/2}{9} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{5/3}{-10} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{-10} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \therefore \text{संगत समीकरण युग्म}$$

$$(iv) \quad 5x - 3y = 11, \quad -10x + 6y = -22$$

$$5x - 3y - 11 = 0, \quad -10x + 6y + 22 = 0$$

$$a_1 = 5, \quad b_1 = -3, \quad c_1 = -11$$

$$a_2 = -10, \quad b_2 = 6, \quad c_2 = 22$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-11}{22} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \therefore \text{संगत समीकरण युग्म}$$

$$(V) \quad \frac{4}{3}x + 2y = 8 \quad , \quad 2x + 3y = 12$$

$$\frac{4}{3}x + 2y - 8 = 0 \quad , \quad 2x + 3y - 12 = 0$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \quad , \quad b_1 = 2 \quad , \quad c_1 = -8$$

$$a_2 = 2 \quad , \quad b_2 = 3 \quad , \quad c_2 = -12$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} \quad \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \therefore \text{संगत समीकरण युग्म}$$

$$\text{प्रश्न-4 (i)} \quad x + y = 5 \quad , \quad 2x + 2y = 10$$

$$x + y - 5 = 0 \quad , \quad 2x + 2y - 10 = 0$$

$$a_1 = 1 \quad , \quad b_1 = 1 \quad , \quad c_1 = -5$$

$$a_2 = 2 \quad , \quad b_2 = 2 \quad , \quad c_2 = -10$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \therefore \text{संगत समीकरण युग्म}$$

[सम्पत्ती]

$$x + y = 5 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad 0 + y = 5$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$$(0, 5)$$

$$y = 0, \quad x + 0 = 5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$(5, 0)$$

$$2x + 2y = 10$$

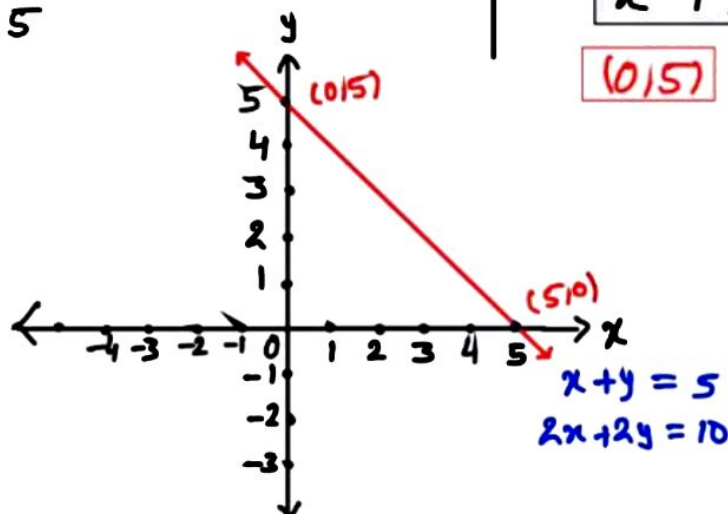
$$2(x + y) = 10$$

$$x + y = \frac{10}{2} = 5$$

$$x + y = 5$$

$$(0, 5)$$

$$(5, 0)$$



(i) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
 $x - y - 8 = 0$, $3x - 3y - 16 = 0$

$a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = -8$
 $a_2 = 3$, $b_2 = -3$, $c_2 = -16$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \therefore$ असंगत समीकरण युग्म

(ii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

$a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = -6$
 $a_2 = 4$, $b_2 = -2$, $c_2 = -4$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \therefore$ संगत समीकरण युग्म

$2x + y - 6 = 0 \Rightarrow$

$x = 0$, $2(0) + y - 6 = 0$

$\Rightarrow y - 6 = 0$

$\Rightarrow y = 6$ (0, 6)

$y = 0$, $2x + 0 - 6 = 0$

$\Rightarrow 2x - 6 = 0$

$\Rightarrow 2x = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$ (3, 0)

$4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow$

$x = 0$, $4(0) - 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow -2y - 4 = 0$

$\Rightarrow -2y = 4$ (0, -2)

$\Rightarrow y = -\frac{4}{2} = -2$

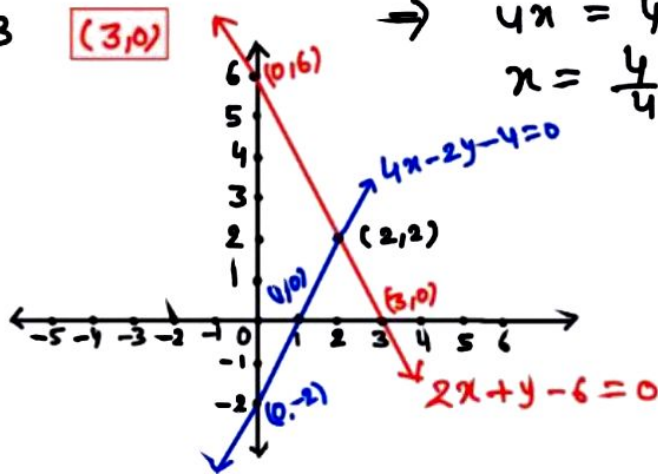
$y = 0$, $4x - 2(0) - 4 = 0$

$\Rightarrow 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow 4x = 4$

$x = \frac{4}{4} = 1$ (1, 0)

हल \rightarrow $x = 2$
 $y = 2$



(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

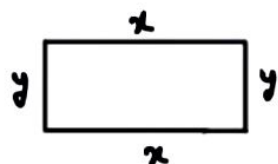
$$\begin{matrix} a_1 = 2 & , & b_1 = -2 & , & c_1 = -2 \\ a_2 = 4 & & b_2 = -4 & & c_2 = -5 \end{matrix}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \therefore$ **असंगत समीकरण युग्म**

प्रश्न-5 एक आयताकार बाग जिसकी लम्बाई-चौड़ाई से 4m अधिक है, का अर्धपरिमाण 36m है। बाग की किगई लल करो।
माना बाग की लम्बाई x m है तथा चौड़ाई y m है।

$$x = y + 4 \quad \text{--- (1)}$$



$$\text{अर्धपरिमाण} = x + y$$

$$x + y = 36 \quad \text{--- (2)}$$

$$x = y + 4 \Rightarrow$$

$$x + y = 36 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad 0 = y + 4 \\ \Rightarrow y = -4$$

$$(0, -4)$$

$$x = 0, \quad 0 + y = 36 \\ y = 36$$

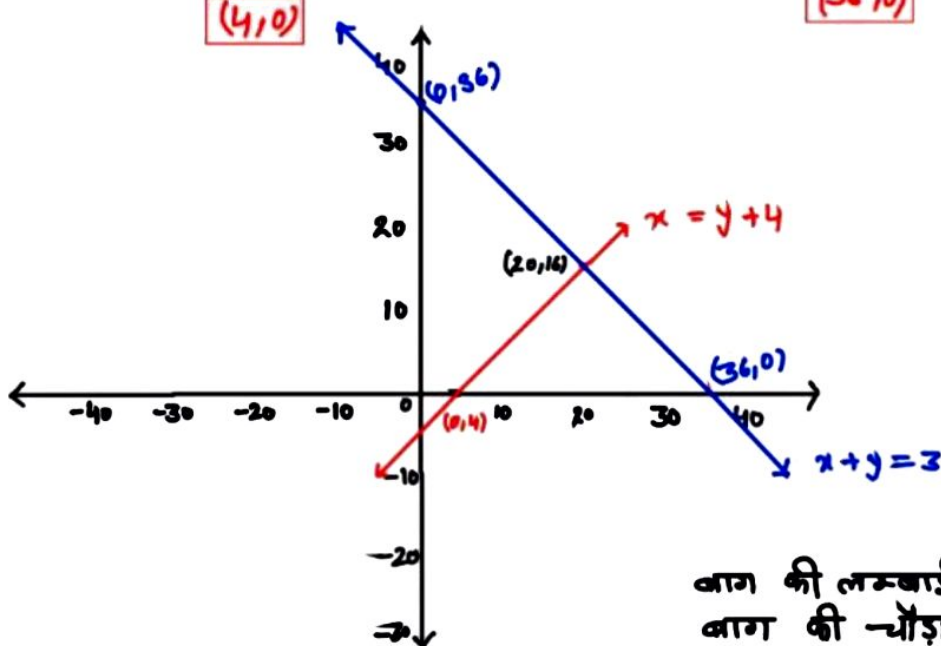
$$(0, 36)$$

$$y = 0, \quad x = 0 + 4 \\ \Rightarrow x = 4$$

$$(4, 0)$$

$$y = 0, \quad x + 0 = 36 \\ x = 36$$

$$(36, 0)$$



बाग की लम्बाई $x = 20$ मीटर
बाग की चौड़ाई $y = 16$ मीटर

उदाहरण - 6 एक रेखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दो-दो में एक रेखा और रेखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त चित्र का ज्यामितीय विवरण ऐसा कि -

- (i) प्रतिच्छेदी करती रेखाएँ हो
- (ii) समांतर रेखाएँ हो
- (iii) संपाती रेखाएँ हो

(i) $2x + 3y - 8 = 0$, $5x + 7y + 10 = 0$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 & b_1 &= 3 & c_1 &= -8 \\ a_2 &= 5 & b_2 &= 7 & c_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5} , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{प्रतिच्छेदी रेखाएँ}$$

(ii) $2x + 3y - 8 = 0$, $2x + 3y + 10 = 0$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 & b_1 &= 3 & c_1 &= -8 \\ a_2 &= 2 & b_2 &= 3 & c_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2} = 1 , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \text{समान्तर रेखाएँ}$$

(iii) $2x + 3y - 8 = 0$ $4x + 6x - 16 = 0$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 & b_1 &= 3 & c_1 &= -8 \\ a_2 &= 4 & b_2 &= 6 & c_2 &= -16 \end{aligned}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} , \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \text{संपाती रेखाएँ}$$

उदाहरण - 7 समीकरणों $x - y + 1 = 0$ तथा $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए।
 x -अक्ष और y -अक्ष रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

हल $x - y + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= 0, & 0 - y + 1 &= 0 \\ &\Rightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

$(0, 1)$

$$\begin{aligned} y &= 0, & x - 0 + 1 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$(-1, 0)$

$$3x + 2y - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x=0, \quad 3(0) + 2y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 2y = 12$$

$$\Rightarrow y = 6$$

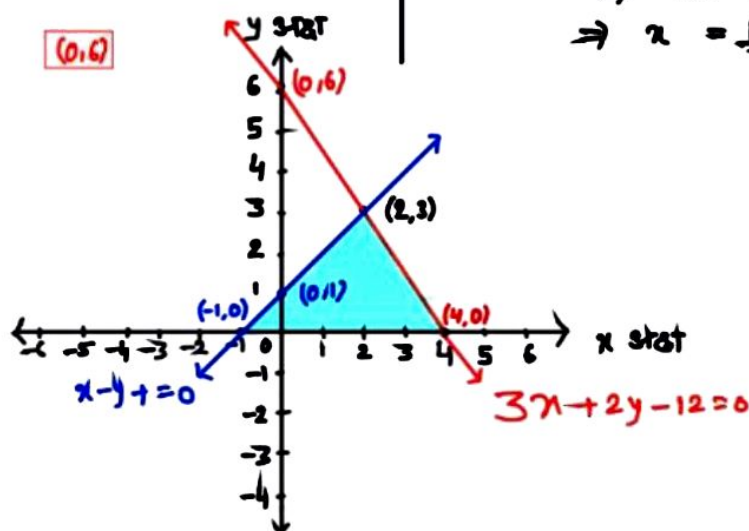
$$(0, 6)$$

$$y=0, \quad 3x + 2(0) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

$$(4, 0)$$



उदाहरण - 7 प्रतिस्थापन विधि द्वारा निम्न रेखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए।

$$7x - 15y = 2 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + 2y = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3 - 2y} \quad \text{--- (3)}$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow 7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$\Rightarrow 21 - 14y - 15y = 2$$

$$\Rightarrow -29y = 2 - 21$$

$$\Rightarrow -29y = -19$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{19}{29}}$$

समीकरण (3) में y का मान रखने पर

$$\Rightarrow x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{1} - \frac{38}{29} \Rightarrow x = \frac{87 - 38}{29} \Rightarrow \boxed{x = \frac{49}{29}}$$

उदाहरण - 8 आफताब अपनी पुत्री से कहता है 'सात वर्ष पूर्व में तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद में तुमसे केवल तीस गुनी आयु का रहे जाऊँगा।' इसे प्रतिस्थापन विधि द्वारा हल कीजिए।

	वर्तमान आयु	7 वर्ष पूर्व आयु	3 वर्ष बाद आयु
आफताब	x वर्ष	$(x - 7)$ वर्ष	$(x + 3)$ वर्ष
पुत्री	y वर्ष	$(y - 7)$ वर्ष	$(y + 3)$ वर्ष

$$(x-4) = 7(y-4)$$

$$; \quad x+3 = 3(y+3)$$

$$x-4 = 7y-49$$

$$x = 7y - 49 + 4$$

$$x = 7y - 45 \quad \text{---(1)}$$

$$x+3 = 3(y+3)$$

$$\Rightarrow x+3 = 3y+9$$

$$\Rightarrow x = 3y + 9 - 3$$

$$\Rightarrow x = 3y + 6 \quad \text{---(2)}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$3y + 6 = 7y - 45$$

$$\Rightarrow 6 + 45 = 7y - 3y$$

$$\Rightarrow 51 = 4y$$

$$\Rightarrow y = \frac{51}{4} = 12 \Rightarrow y = 12$$

समीकरण (2) में y का मान रखने पर

$$x = 3(12) + 6$$

$$x = 36 + 6$$

$$x = 42 \Rightarrow x = 42$$

अतः आपलाब और उसकी उनी क्रमशः 42 वर्ष और 12 वर्ष के हैं।

उदाहरण - 9 2 पेंसिल और 3 रबड़ों का मूल्य 9 रुपये हैं तथा 4 पेंसिल और 6 रबड़ों का मूल्य 18 रुपये हैं। ज्येक पेंसिल और ज्येक रबड़ का मूल्य ज्ञात करो।

हल माना, पेंसिल का मूल्य x रुपये हैं
तथा, रबड़ का मूल्य y रुपये हैं

$$2x + 3y = 9 \quad \text{---(1)}$$

$$4x + 6y = 18 \quad \text{---(2)}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 9 - 3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{9-3y}{2} \quad \text{---(3)}$$

समीकरण 2 में x का मान रखने पर

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$

$$\Rightarrow 2(9-3y) + 6y = 18$$

$$\Rightarrow 18 - 6y + 6y = 18$$

$$\Rightarrow 18 = 18$$

\Rightarrow संपाती रेखाएं \Rightarrow

अनन्त हल

उदाहरण-10 दो रेल की पटरियाँ समीकरणों $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ द्वारा निरूपित की गई हैं। क्या रेल पटरियाँ एक दूसरे को काटेगी।

हल

$$x + 2y - 4 = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\Rightarrow x + 2y - 4 = 0$$

$$x = 4 - 2y \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 4y + 4y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow -4 = 0 \quad \text{यह संभव नहीं है}$$

अतः दिए गए समीकरण युग्म का हल संभव नहीं है।

उत्तरावली 3.3

उत्तर-4 निम्न रेखिक समीकरण युग्म को उत्तिस्थापन विधि से हल कीजिए।

$$(1) \quad x + y = 14 \quad , \quad x - y = 4$$

$$x + y = 14 \quad \text{--- (1)}$$

$$x - y = 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow x = 4 + y \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (3) से x का मान (1) में रखने पर

$$\Rightarrow 4 + y + y = 14$$

$$\Rightarrow 4 + 2y = 14$$

$$\Rightarrow 2y = 14 - 4 = 10$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5$$

y का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$x = 4 + 5 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

$$(ii) \quad S - T = 3 \quad ; \quad \frac{S}{3} + \frac{T}{2} = 6$$

$$S - T = 3 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{S}{3} + \frac{T}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2S + 3T}{6} = 6$$

$$\Rightarrow 2S + 3T = 36 \quad \text{--- (2)}$$

$$S - T = 3$$

$$\Rightarrow S = 3 + T \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण 2 में S का मान रखने पर

$$\Rightarrow 2(3 + T) + 3T = 36$$

$$\Rightarrow 6 + 2T + 3T = 36$$

$$\Rightarrow 5T = 36 - 6$$

$$\Rightarrow 5T = 30$$

$$\Rightarrow T = \frac{30}{5} = 6$$

समीकरण 3 में T का मान रखने पर

$$S = 3 + 6 \Rightarrow S = 9$$

(iii)

$$3x - y = 3$$

$$9x - 3y = 9$$

$$3x - y = 3 \quad \text{--- (1)}$$

$$9x - 3y = 9 \quad \text{--- (2)}$$

$$3x - y = 3$$

$$3x - 3 = 9 \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (2) में y का मान रखने पर

$$9x - 3(3x - 3) = 9$$

$$\Rightarrow 9x - 9x + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 9 = 9$$

यह एक सत्य समीकरण है

\therefore समीकरण (1) एवं (2) से मिलने वाली रेखाएँ संपाती हैं जिन्हें अनंत हल निकालेंगे।

(iv)

$$0.2x + 0.3y = 1.3$$

$$0.4x + 0.5y = 2.3$$

$$0.2x + 0.3y = 1.3 \quad \text{--- (1)}$$

$$0.4x + 0.5y = 2.3 \quad \text{--- (2)}$$

समी (1) से $\Rightarrow 0.2x + 0.3y = 1.3$

$$\Rightarrow \frac{2}{10}x + \frac{3}{10}y = \frac{13}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y}{10} = \frac{13}{10}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13 \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (2) से $\Rightarrow 0.4x + 0.5y = 2.3$

$$\Rightarrow \frac{4x}{10} + \frac{5y}{10} = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{4x + 5y}{10} = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow 4x + 5y = 23 \quad \text{--- (4)}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13$$

$$\Rightarrow 2x = 13 - 3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{13 - 3y}{2} \quad \text{--- (5)}$$

समीकरण (4) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow 4\left(\frac{13 - 3y}{2}\right) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 2(13 - 3y) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 26 - 6y + 5y = 23$$

$$\Rightarrow -y + 5y = 23 - 26$$

$$\Rightarrow -y = -3 \Rightarrow y = 3$$

समीकरण (5) में y का मान रखने पर -

$$x = \frac{13 - 3(3)}{2} = \frac{13 - 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = 2$$

$$(v) \quad \boxed{\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0} \quad \boxed{\sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0}$$

$$\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0 \rightarrow (1)$$

$$\sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0 \rightarrow (2)$$

समीकरण (1) $\Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{2x} = -\sqrt{3y}$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y} \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y\right) - \sqrt{8y} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)y - \sqrt{8y} = 0$$

$$\Rightarrow -y\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{0}{\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}} = \boxed{0}$$

समीकरण (3) में y का मान रखने पर \rightarrow

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(0) \Rightarrow \boxed{0}$$

$$(vi) \quad \boxed{\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2} \quad \boxed{\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6} \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{9x - 10y}{6} = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{9x - 10y = -12} \quad \text{--- (3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{2x + 3y = 13} \text{ --- (4)}$$

$$\Rightarrow 2x = 13 - 3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-3y}{2} \text{ --- (5)}$$

समीकरण (3) में x का मान रखने पर -

$$3\left(\frac{13-3y}{2}\right) - 10y = -12$$

$$\Rightarrow \frac{117 - 27y}{2} - 10y = -12$$

$$\Rightarrow \frac{117 - 27y - 20y}{2} = -12$$

$$\Rightarrow 117 - 47y = -24$$

$$\Rightarrow -47y = -24 - 117$$

$$\Rightarrow -47y = -141 \quad \Rightarrow y = \frac{141}{47} = 3$$

$$\boxed{y = 3}$$

समीकरण 5 में y का मान रखने पर \rightarrow

$$x = \frac{13 - 3(3)}{2}$$

$$x = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{x=2}, \boxed{y=3}$$

उत्तर-2 $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे m का वह मान बता कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

हल

$$2x + 3y = 11 \text{ --- (1)}$$

$$2x - 4y = -24 \text{ --- (2)}$$

$$\Rightarrow 2x = 4y - 24$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y - 24}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y}{2} - \frac{24}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2y - 12} \text{ --- (3)}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow 2(2y - 12) + 3y = 11$$

$$\Rightarrow 4y - 24 + 3y = 11$$

$$\Rightarrow 7y - 24 = 11$$

$$\Rightarrow 7y = 11 + 24$$

$$\Rightarrow 7y = 35$$

$$\Rightarrow y = \frac{35}{7} = 5$$

$$\boxed{y=5}$$

समीकरण (3) में y का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow x = 2(5) - 12$$

$$\Rightarrow x = 10 - 12 = -2 \quad \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$\Rightarrow y = mx + 3$$

$$\Rightarrow 5 = -2m + 3$$

$$\Rightarrow 5 - 3 = -2m$$

$$\Rightarrow 2 = -2m$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{2} = m \quad \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

प्रश्न - 3 (a) दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। ऊँहे शत कीजिए

हल माना दो संख्याएँ x एवं y हैं।

$$x - y = 26 \quad \text{--- (1)}$$

$$x = 3y \quad \text{--- (2)}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$3y - y = 26$$

$$2y = 26$$

$$y = \frac{26}{2} = 13 \quad \Rightarrow \boxed{y = 13}$$

y का मान समीकरण 2 में रखने पर

$$x = 3(13) = 39$$

$$\boxed{x = 39}$$

(b) दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18° अधिक है। ऊँडे शत कीजिए।

हल माना दो संपूरक कोण x° एवं y° हैं।

$$x = y + 18 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + y = 180 \quad \text{--- (2)}$$

समीकरण (1) से x का मान (2) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow y + 18 + y = 180$$

$$\Rightarrow 2y + 18 = 180$$

$$\Rightarrow 2y = 180 - 18$$

$$\Rightarrow 2y = 162 \quad \Rightarrow y = \frac{162}{2} = 81^\circ \quad \Rightarrow \boxed{y = 81^\circ}$$

समीकरण (1) में y का मान रखने पर \rightarrow

$$x = 81 + 18 = 99^\circ \quad \Rightarrow \boxed{x = 99^\circ}$$

(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 4 बल्ले तथा 6 गेंदे 3800 रुपये में खरीदी। बाद में, उसने 3 बल्ले और 5 गेंदे 1750 रुपये में खरीदी। उल्लेख बल्ले और उल्लेख गेंद का दल्य शत करो।

हल - माना 1. बरतों का मूल्य x रुपये तथा एक गेंद का मूल्य y रुपये हैं।

$$7 \text{ बरतों} + 6 \text{ गेंदें} \rightarrow 3800 \text{ रुपये}$$

$$3 \text{ बरतों} + 5 \text{ गेंदें} \rightarrow 1750 \text{ रुपये}$$

$$7x + 6y = 3800 \text{ रुपये} \quad \text{--- (1)}$$

$$3x + 5y = 1750 \text{ रुपये} \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow 3x = 1750 - 5y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1750 - 5y}{3} \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \left(\frac{1750 - 5y}{3} \right) + 6y = 3800$$

$$\Rightarrow \frac{12250 - 35y}{3} + 6y = 3800$$

$$\Rightarrow 12250 - 35y + 18y = 11400$$

$$\Rightarrow -17y = 11400 - 12250$$

$$-17y = -850$$

$$\Rightarrow y = \frac{850}{17} = 50 \Rightarrow \boxed{y = 50}$$

समीकरण (3) में y का मान रखने पर \rightarrow

$$x = \frac{1750 - 250}{3} = \frac{1500}{3} = 500$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 500}$$

अतः बरतों का मूल्य $x = 500$ रुपये

गेंदों का मूल्य $y = 50$ रुपये

(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दूरी पर भाड़ा संचित किया जाता है। 10 km दूरी के लिए भाड़ा 105 रुपये है तथा 15 km के लिए भाड़ा 155 रुपये है। नियत भाड़ा तथा प्रति km भाड़ा क्या है? एक व्यक्ति को 25 km यात्रा के लिए कितना भाड़ा देना होगा।

हल \rightarrow माना नियत भाड़ा x रुपये है तथा प्रति km भाड़ा y रुपये है।

$$10 \text{ km} \rightarrow 150 \text{ रुपये}, \quad 15 \text{ km} \rightarrow 155 \text{ रुपये}$$

$$x + 10y = 105 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + 15y = 155 \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 155 - 15y} \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow 155 - 15y + 10y = 105$$

$$-5y = 105 - 155$$

$$\Rightarrow -5y = -50$$

$$\Rightarrow y = \frac{50}{5} = 10 \text{ रुपये} \Rightarrow \boxed{y=10}$$

$$\text{समीकरण (3) से} \Rightarrow x = 155 - 15(10) \\ = 155 - 150 \\ x = 5 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

अतः नियत भाड़ा $x = 5$ रुपये तथा प्रति km, भाड़ा $y = 10$ रुपये
 $25 \text{ km का भाड़ा} = 5 + 15(10) = 255 \text{ रुपये}$

[V] यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में दो जोड़ दिया जाए तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। यदि अंश व हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।
माना भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

$$\frac{x+2}{y+2} = \frac{5}{11} \quad \text{--- (1)}$$

$$\Rightarrow 11(x+2) = 5(y+2) \\ \Rightarrow 11x + 22 = 5y + 10 \\ \Rightarrow 11x = 5y + 10 - 22 \\ \Rightarrow 11x = 5y - 12$$

$$x = \frac{5y-12}{11} \quad \text{--- (2)}$$

अंश = x , हर = y

$$\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6} \quad \text{--- (3)}$$

$$\Rightarrow 6(x+3) = 5(y+3) \\ \Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15 \\ \Rightarrow 6x + 18 - 15 = 5y$$

$$\Rightarrow 6x + 3 = 5y \quad \text{--- (4)}$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow 6\left(\frac{5y-12}{11}\right) + 3 = 5y$$

$$\Rightarrow \frac{54y-72}{11} + 3 = 5y$$

$$\Rightarrow \frac{54y - 72 + 33}{11} = 5y$$

$$\Rightarrow 54y + 9 = 55y$$

$$\Rightarrow 9 = 55y - 54y$$

$$9 = y \Rightarrow \boxed{y=9}$$

$$\text{समीकरण (3) से} \Rightarrow x = \frac{9(9)-12}{11}$$

$$= \frac{81-12}{11} = \frac{69}{11} = 7$$

$$\boxed{x=7}$$

$$\text{अतः भिन्न} = \frac{x}{y} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{7+2}{9+2} = \frac{9}{11}$$

$$\frac{7+3}{9+3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

(vi) 5 वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से 3 गुनी हो जायेगी। 5 वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु की 7 गुनी थी। उसकी वर्तमान आयु क्या है।

हल

	वर्तमान आयु	5 वर्ष बाद आयु	5 वर्ष पूर्व आयु
जैकब	x	$(x+5)$	$(x-5)$
पुत्र	y	$(y+5)$	$(y-5)$

$$x+5 = 3(y+5)$$

$$\Rightarrow x+5 = 3y+15$$

$$\Rightarrow x = 3y+15-5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3y+10} \quad \text{--- (1)}$$

$$(x-5) = 7(y-5)$$

$$\Rightarrow x-5 = 7y-35$$

$$\Rightarrow x = 7y-35+5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 7y-30} \quad \text{--- (2)}$$

समीकरण (1) से x का मान समीकरण (2) में रखने पर -

$$\Rightarrow 3y+10 = 7y-30$$

$$\Rightarrow 10+30 = 7y-3y$$

$$\Rightarrow 40 = 4y$$

$$\Rightarrow y = \frac{40}{4} = 10 \text{ वर्ष}$$

$$\text{समीकरण (1) से } \Rightarrow x = 3(10)+10$$

$$= 30+10$$

$$\Rightarrow 40 \text{ वर्ष}$$

$$\text{अतः जैकब की आयु } x = 40 \text{ वर्ष}$$

$$\text{जैकब के पुत्र की आयु } y = 10 \text{ वर्ष}$$

उदाहरण - 44 दो व्यक्ति की आय का अनुपात 9:4 है, और उनके खर्चों का अनुपात 4:3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रुपये बचा लेता है तो उनकी मसिक आय रात कीजिए।

$$\text{आय का अनुपात} = 9:4$$

$$\text{माना पहले व्यक्ति की आय} = 9x$$

$$\text{तथा दूसरे व्यक्ति की आय} = 4x$$

$$\text{खर्चों का अनुपात} = 4:3$$

$$\text{माना पहले व्यक्ति का खर्च} = 4y$$

$$\text{तथा दूसरे व्यक्ति का खर्च} = 3y$$

$$\boxed{\text{अचयत} = \text{आय} - \text{खर्च}}$$

पहले व्यक्ति के लिए \rightarrow

$$2000 = 9x - 4y \quad \text{--- (1)}$$

दूसरे व्यक्ति के लिए \rightarrow

$$2000 = 7x - 3y \quad \text{--- (2)}$$

$$9x - 4y = 2000 \rightarrow (3)$$

$$7x - 3y = 2000 \rightarrow (4)$$

समीकरण ① $\times 3$ एवं समीकरण ② $\times 4 \Rightarrow$

$$27x - 12y = 6000 \rightarrow (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \rightarrow (4)$$

$$\underline{-x = -2000}$$

$$\boxed{x = 2000}$$

पहले व्यक्ति की आय = $9x = 9(2000) = 18000$ रुपये
 दूसरे व्यक्ति की आय = $7x = 7(2000) = 14000$ रुपये

उदाहरण-12 विलोपन विधि का प्रयोग करके, निम्न रेखिक समीकरण युग्म के सभी सम्भव हल ज्ञात कीजिए।

$$2x + 3y = 8, \quad 4x + 6y = 7$$

$$2x + 3y = 8 \rightarrow (1)$$

$$4x + 6y = 7 \rightarrow (2)$$

समीकरण ① $\times 2 \Rightarrow$

$$4x + 6y = 16 \rightarrow (3)$$

$$4x + 6y = 7 \rightarrow (2)$$

$[(3) - (2)]$
 $0 = 9 \Rightarrow$ जो कि असंभव कथन है
 अतः इन समीकरण युग्म का कोई हल विद्यमान नहीं है।

उदाहरण-13 दो अंकों की एक संख्या एवं उसके अंकों को उलटने पर बनी संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंकों का अन्तर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए।
 ऐसी संख्याएँ कितनी हैं?

माना दो अंकों की संख्या का दशार्ध का अंक y है
 एवं दशार्ध अंक x है।

अतः उसका उल्टा $(10x + y)$ होगा।

इस संख्या के अंको उलटने पर बनी नयी संख्या का उल्टा $(10y + x)$ होगा।

$$\Rightarrow (10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$\Rightarrow 11x + 11y = 66$$

$$\Rightarrow 11(x + y) = 66$$

$$\Rightarrow (x + y) = \frac{66}{11} = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y = 6} \rightarrow (1)$$

$$2 \text{ Case } \Rightarrow x - y = 2$$

$$\text{or } y - x = 2$$

Case I

$$x + y = 6$$

$$x - y = 2$$

$$\underline{2x = 8} \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

Case II

$$x + y = 6, \quad y - x = 2$$

$$x + y = 6$$

$$\underline{-x + y = 2}$$

$$2y = 8$$

$$\boxed{y = 4}$$

समीकरण ① से \Rightarrow

$$4 + y = 6$$

$$y = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{\text{संख्या} = 42}$$

समीकरण ① से \Rightarrow

$$x + 4 = 6$$

$$x = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{\text{संख्या} = 24}$$

उत्तरावली - 3.4

उदा-1 निम्न समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि तथा प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

(i) $x + y = 5$, $2x - 3y = 4$

(a) विलोपन विधि

$$x + y = 5 \quad \text{--- ①}$$

$$2x - 3y = 4 \quad \text{--- ②}$$

समीकरण ① $\times 3 \Rightarrow$

$$3x + 3y = 15 \rightarrow \text{③}$$

$$2x - 3y = 4 \rightarrow \text{④}$$

③+④

$$\frac{5x}{} = 19$$

$$\boxed{x = \frac{19}{5}}$$

समीकरण ① \Rightarrow

$$\frac{19}{5} + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{1} - \frac{19}{5} \Rightarrow \frac{25-19}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{6}{5}}$$

(b) प्रतिस्थापन विधि

$$x + y = 5 \rightarrow \text{①}$$

$$2x - 3y = 4 \rightarrow \text{②}$$

$$x + y = 5$$

$$\Rightarrow x = 5 - y \quad \text{--- ③}$$

समीकरण ② में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow 2(5 - y) - 3y = 4$$

$$\Rightarrow 10 - 2y - 3y = 4$$

$$\Rightarrow 10 - 5y = 4$$

$$\Rightarrow -5y = 4 - 10$$

$$\Rightarrow -5y = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{5}}$$

समीकरण ③ में y का मान रखने पर

$$x = \frac{5}{1} - \frac{6}{5}$$

$$= \frac{25-6}{5} = \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{19}{5}}$$

(ji) $3x + 4y = 10$ और $2x - 2y = 2$

(a) विलोपन विधि \rightarrow

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 2 \\ 2(x - y) &= 2 \\ x - y &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$x - y = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x + 4y = 10 \quad \text{--- (2)}$$

समीकरण (1) $\times 4 \Rightarrow$

$$4x - 4y = 4 \quad \text{--- (3)}$$

$$3x + 4y = 10 \quad \text{--- (2)}$$

(3) + (2)

$$7x = 14$$

$$\Rightarrow x = \frac{14}{7} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$2 - y = 1$$

$$\Rightarrow -y = 1 - 2$$

$$\Rightarrow -y = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1}$$

(b) प्रतिस्थापन विधि \rightarrow

$$x - y = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x + 4y = 10 \quad \text{--- (2)}$$

$$x = 1 + y \rightarrow \text{(3) समी. (1) से}$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर \rightarrow

$$3(1 + y) + 4y = 10$$

$$\Rightarrow 3 + 3y + 4y = 10$$

$$\Rightarrow 3 + 7y = 10$$

$$\Rightarrow 7y = 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{7} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

समीकरण (3) में y का मान रखने पर

$$\Rightarrow x = 1 + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2}$$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ और $9x = 2y + 7$

(a) विलोपन विधि

$$3x - 5y - 4 = 0$$

$$3x - 5y = 4$$

$$3x - 5y = 4 \quad - (1)$$

$$9x - 2y = 7 \quad - (2)$$

$$9x = 2y + 7$$

$$9x - 2y = 7$$

सभी (1) $\times 3 \Rightarrow$

$$9x - 15y = 12 \quad - (3)$$

$$9x - 2y = 7 \quad - (2)$$

$$\begin{array}{r} 9x - 15y = 12 \\ -9x + 2y = -7 \\ \hline -13y = 5 \end{array} \Rightarrow y = -\frac{5}{13}$$

समीकरण (1) में y का मान रखने पर

$$\Rightarrow 3x - 5\left(-\frac{5}{13}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{25}{13} = 4$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{4}{1} - \frac{25}{13}$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{27}{13} \Rightarrow x = \frac{9}{13}$$

(b) प्रतिस्थापन विधि :-

$$3x - 5y = 4$$

$$3x = 4 + 5y$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 + 5y}{3} \quad - (4)$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow 9\left(\frac{4 + 5y}{3}\right) - 2y = 7$$

$$\Rightarrow 12 + 15y - 2y = 7$$

$$\Rightarrow 12 + 13y = 7$$

$$\Rightarrow 13y = 7 - 12$$

$$\Rightarrow 13y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{13}$$

समीकरण (4) में y का मान रखने पर

$$x = \frac{4 + 5\left(-\frac{5}{13}\right)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4}{1} - \frac{25}{13}}{3} \Rightarrow \frac{\frac{52 - 25}{13}}{3} \Rightarrow \frac{27}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{13}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{13}$$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ और $x - \frac{y}{3} = 3$

(a) विलोपन विधि:-

$$\begin{array}{l|l} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 & \frac{x}{1} - \frac{y}{3} = 3 \\ \Rightarrow \frac{3x + 4y}{6} = -1 & \Rightarrow \frac{3x - y}{3} = 3 \\ \Rightarrow \boxed{3x + 4y = -6} & \Rightarrow \boxed{3x - y = 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = -6 \quad \text{--- ①} \\ 3x - y = 9 \quad \text{--- ②} \\ \hline \end{array}$$

① - ② $\Rightarrow 5y = -15$
 $y = \frac{-15}{5} = -3 \Rightarrow \boxed{y = -3}$

समीकरण ② में y का मान रखने पर \Rightarrow

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 9 \\ 3x &= 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

$\boxed{x = 2}$

(b) प्रतिस्थापन विधि

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -6 \quad \text{①} \\ 3x - y &= 9 \quad \text{②} \\ \Rightarrow 3x - 9 &= y \quad \text{③} \end{aligned}$$

समीकरण ① में y का मान रखने पर \Rightarrow

$$\begin{aligned} 3x + 4(3x - 9) &= -6 \\ \Rightarrow 3x + 12x - 36 &= -6 \\ \Rightarrow 15x &= -6 + 36 \\ \Rightarrow 15x &= 30 \\ x &= \frac{30}{15} \Rightarrow \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

समीकरण ③ में x का मान रखने पर \Rightarrow

$$\begin{aligned} 3(2) - 9 &= y \\ \Rightarrow 6 - 9 &= y \\ \Rightarrow -3 &= y \Rightarrow \boxed{y = -3} \end{aligned}$$

उदा-2 (i) यदि हम अंग में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दें, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दें, तो घट $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है?

हल माना भिन्न = $\frac{x}{y}$

अंग = x , हर = y

$$\begin{array}{l|l} \frac{x+1}{y-1} = 1 & \frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x+1 = y-1 & \Rightarrow 2x = y+1 \\ \Rightarrow \boxed{x-y = -2} \rightarrow \text{①} & \Rightarrow \boxed{2x-y = 1} \rightarrow \text{②} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - y = -2 \\ 2x - y = 1 \\ \hline -x = -3 \end{array}$$

\Rightarrow समी. ① - ②

$$\Rightarrow \boxed{x = 3}$$

समीकरण ① में x का मान रखने पर \Rightarrow

$$\Rightarrow 3 - y = -2$$

$$\Rightarrow -y = -2 - 3$$

$$\Rightarrow -y = -5$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 5}$$

\Rightarrow

$$\text{भिन्न} = \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

(ii) 5 वर्ष पूर्व दूरी की आयु सोह की आयु की तीन गुना थी। दस वर्ष पश्चात् दूरी की आयु सोह की आयु की दो गुनी हो जायेगी। दूरी और सोह की आयु कितनी हैं ?

	वर्तमान आयु	5 वर्ष पूर्व	10 वर्ष पश्चात्
दूरी	x	$x - 5$	$x + 10$
सोह	y	$y - 5$	$y + 10$

$$x - 5 = 3(y - 5)$$

$$\Rightarrow x - 5 = 3y - 15$$

$$\Rightarrow x - 3y = -15 + 5$$

$$\Rightarrow \boxed{x - 3y = -10} \rightarrow \text{①}$$

$$(x + 10) = 2(y + 10)$$

$$\Rightarrow x + 10 = 2y + 20$$

$$\Rightarrow x - 2y = 20 - 10$$

$$\Rightarrow \boxed{x - 2y = 10} \rightarrow \text{②}$$

$$x - 3y = -10$$

$$x - 2y = 10$$

$$\hline -y = -20$$

समी. ① - ② \Rightarrow

$$\Rightarrow \boxed{y = 20 \text{ वर्ष}}$$

समीकरण ② में y का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow x - 2(20) = 10$$

$$\Rightarrow x - 40 = 10$$

$$\Rightarrow x = 10 + 40 = 50 \text{ वर्ष} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 50 \text{ वर्ष}}$$

अतः दूरी की आयु $x = 50$ वर्ष
सोह की आयु $y = 20$ वर्ष

(iii) दो अंको की संख्या के अंको का योग 9 है। इस संख्या का 9 गुना, संख्या के अंको को पलटने से बनी संख्या का 2 गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल - माना दो अंको की संख्या xy है जिसका प्रकार $(10x + y)$ है।

अंको को पलटने से बनी संख्या yx है जिसका प्रकार $(10y + x)$ है।

$$\begin{aligned}
 x + y &= 9 \quad \text{--- (1)} \\
 \Rightarrow 9(10x + y) &= 2(10y + x) \\
 \Rightarrow 90x + 9y &= 20y + 2x \\
 \Rightarrow 90x - 2x &= 20y - 9y \\
 \Rightarrow 88x &= 11y \\
 \Rightarrow 8x &= y \\
 \Rightarrow \boxed{8x - y = 0} \quad \text{--- (2)}
 \end{aligned}$$

समी. ① + ②

$$\begin{array}{r}
 x + y = 9 \\
 8x - y = 0 \\
 \hline
 9x = 9 \quad \boxed{x = 1}
 \end{array}$$

समीकरण ① में x का मान रखने पर \rightarrow

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 1 + y &= 9 \\
 \Rightarrow y &= 9 - 1 \Rightarrow \boxed{y = 8} \\
 \Rightarrow \text{अतः संख्या } xy &= 18
 \end{aligned}$$

(iv) मीना 2000 रुपये निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजान्ची से 50 रुपये और 100 रुपये के नोट देने को कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए कि उसने 50 रुपये और 100 रुपये के कितने कितने नोट प्राप्त कीजिए।
हल माना मीना ने 50 रुपये के x नोट तथा 100 रुपये के y नोट प्राप्त किए।

$$\boxed{x + y = 25} \quad \text{--- (1)}$$

$$50x + 100y = 2000$$

$$\Rightarrow 50(x + 2y) = 2000$$

$$\Rightarrow x + 2y = \frac{2000}{50}$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y = 40} \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{array}{r}
 x + y = 25 \\
 x + 2y = 40 \\
 \hline
 \end{array}$$

समी. ① - ② $\Rightarrow -y = -15 \Rightarrow \boxed{y = 15}$

समीकरण 1 में y का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow x + 15 = 25$$

$$\Rightarrow x = 25 - 15$$

$$\Rightarrow x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

अतः मीना ने 50 रुपये के नोट $x = 10$
 100 रुपये के नोट $y = 15$

(v) किराए पर पुस्तकें देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम 3 दिन का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक दिन का अलग किराया है। खरिल ने 7 दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए 27 रुपये अदा किए, जबकि सुषी ने 5 दिनों तक रखने के लिए 21 रुपये अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

हल - माना नियत किराया x रुपये तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया y रुपये है।

$$\begin{aligned} 7 \text{ दिन} &\rightarrow 27 \text{ रुपये} \\ 5 \text{ दिव} &\rightarrow 21 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

$$x + 4y = 27 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + 2y = 21 \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{array}{r} x + 4y = 27 \\ x + 2y = 21 \\ \hline \end{array}$$

समी. (1) - (2) $\rightarrow 2y = 6 \rightarrow \boxed{y = 3}$
समीकरण (2) में y का मान रखने पर \rightarrow

$$x = 2(3) = 6$$

$$x + 6 = 21$$

$$\boxed{x = 15}$$

अतः नियत किराया $x = 15$ रुपये

अतिरिक्त दिन का किराया $y = 3$ रुपये

उदाहरण - 14 बेंगलोर के एक बस स्टैंड से यदि हम 2 टिकट मल्लेश्वरम के तथा 3 टिकट मरावांतपुर के खरीदें, तो कुल लागत 46 रुपये है। परन्तु यदि हम 3 टिकट मल्लेश्वरम के और 5 टिकट मरावांतपुर के खरीदें, तो कुल लागत 74 रुपये है, बस स्टैंड से मल्लेश्वरम का किराया तथा बस स्टैंड से मरावांतपुर का किराया ज्ञात कीजिए।

हल - माना बस स्टैंड से मल्लेश्वरम का किराया x रुपये तथा बस स्टैंड से मरावांतपुर का किराया y रुपये है।

$$2x + 3y = 46 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x + 5y = 74 \quad \text{--- (2)}$$

$$2x + 3y - 46 = 0$$

$$3x + 5y - 74 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3(-74) - 5(-46)} = \frac{-y}{2(-74) - 3(-46)} = \frac{1}{2(5) - 3(3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-222 + 230} = \frac{-y}{-148 + 138} = \frac{1}{10 - 9}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{-y}{-10} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{1}$$

$$\boxed{x = 8}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

$$\boxed{y = 10}$$

अतः बस स्टैंड से मल्होद्वरम का किराया $x = 8$ रुपये
बस स्टैंड से यशवन्तपुर का किराया $y = 10$ रुपये

उदाहरण - 13 p के किस मानों के लिए, निम्न समी. के युग्म का एक अद्वितीय हल है?

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

$$a_1 = 4 \quad b_1 = p \quad c_1 = 8$$

$$a_2 = 2 \quad b_2 = 2 \quad c_2 = 2$$

अद्वितीय हल के लिए \Rightarrow

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \neq \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow 4 \neq p$$

$$\Rightarrow \boxed{p \neq 4}$$

$\therefore 4$ के आलावा p के प्रत्येक मान के लिए निम्न समी. युग्म के अद्वितीय हल प्राप्त होंगे।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\textcircled{1} \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ (अद्वितीय हल) [एक हल]}$$

$$\textcircled{2} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ (कोई हल नहीं)}$$

$$\textcircled{3} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

[अपरिमित रूप से अन्त हल]

उदाहरण - 16 k के किस मान के लिए, निम्न रेखिक समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$Kx + 3y - (K-3) = 0$$

$$12x + Ky - K = 0$$

$$a_1 = K \quad b_1 = 3 \quad c_1 = -(K-3)$$

$$a_2 = 12 \quad b_2 = K \quad c_2 = -K$$

अपरिमित रूप से अनेक हल \rightarrow

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{12} = \frac{3}{K} = \frac{-(K-3)}{-K}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{12} = \frac{3}{K} \Rightarrow K^2 = 36$$

$$\Rightarrow K = \pm \sqrt{36} = \pm 6$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\textcircled{1} \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ (अद्वितीय हल) [एक हल]}$$

$$\textcircled{2} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ (कोई हल नहीं)}$$

$$\textcircled{3} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

[अपरिमित रूप से अन्त हल]

$$\Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{k-3}{k}$$

$$\Rightarrow k^2 = 12(k-3)$$

$$\Rightarrow k^2 = 12k - 36$$

$$\Rightarrow k^2 - 12k + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (k-6)^2 = 0$$

$$\Rightarrow k-6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k=6}$$

$$\Rightarrow \boxed{k=6}$$

प्रश्नावली - 3.5

प्रश्न - 1 निम्न रेखिक समीकरणों के युग्मों में से किसी एक अद्वितीय हल है, किसी कोई हल नहीं है या किसी अपरिमित रूप से अनेक हल है। अद्वितीय हल की स्थिति में, उसे वज्र गुणन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $\boxed{x-3y-3=0}$

$\boxed{3x-5y-2=0}$

$$x - 3y - 3 = 0$$

$$3x - 5y - 2 = 0$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -3, \quad c_1 = -3$$

$$a_2 = 3, \quad b_2 = -5, \quad c_2 = -2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

∴ इस समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

(ii) $\boxed{2x+y=5}$

$\boxed{3x+2y=8}$

$$2x + y = 5$$

$$\Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

$$3x + 2y = 8$$

$$3x + 2y - 8 = 0$$

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = 1$$

$$c_1 = -5$$

$$a_2 = 3$$

$$b_2 = 2$$

$$c_2 = -8$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}} \Rightarrow \therefore \text{अद्वितीय हल}$$

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x + 2y - 8 = 0$$

$$\frac{x}{1(-8)-2(-5)} = \frac{-y}{2(-8)-3(-5)} = \frac{1}{2(2)-3(1)}$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

① $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (अद्वितीय हल) [एक हल]

② $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (कोई हल नहीं)

③ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

[अपरिमित रूप से अनेक हल]

$$\Rightarrow \frac{x}{-8+10} = \frac{-y}{-16+15} = \frac{1}{4-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{-y}{-1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

(iii) $\boxed{3x-5y=20}$, $\boxed{6x-10y=40}$

$$\Rightarrow 3x-5y-20=0 \quad , \quad 6x-10y-40=0$$

$$a_1 = 3 \quad b_1 = -5 \quad c_1 = -20$$

$$a_2 = 6 \quad b_2 = -10 \quad c_2 = -40$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}$$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \therefore$ अपरिमित रूप से अनेक हल मिलेंगे।

(iv) $\boxed{x-3y-7=0}$, $\boxed{3x-3y-15=0}$

$$x-3y-7=0 \quad , \quad 3x-3y-15=0$$

$$a_1 = 1 \quad , \quad b_1 = -3 \quad , \quad c_1 = -7$$

$$a_2 = 3 \quad , \quad b_2 = -3 \quad , \quad c_2 = -15$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-3}$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \therefore$ अद्वितीय हल मिलेंगे।

$$\begin{aligned} x-3y-7 &= 0 \\ 3x-3y-15 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{(-3)(-15) - (-3)(-7)} = \frac{-y}{1(-15) - 3(-7)} = \frac{1}{1(-3) - 3(-3)}$$

$$\frac{x}{45-21} = \frac{-y}{-15+21} = \frac{1}{-3+9}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{-y}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{24}{6} \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\frac{-y}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow -y = \frac{6}{6} \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

प्रश्न-2

(1) a और b के किन मानों के लिए, निम्न समीकरण के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$2x + 3y = 7, \quad (a-b)x + (a+b)y = (3a+b-2)$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 7$$

$$\Rightarrow (a-b)x + (a+b)y = (3a+b-2)$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & b_1 = 3 & c_1 = 7 \\ a_2 = (a-b) & b_2 = (a+b) & c_2 = (3a+b-2) \end{array}$$

अपरिमित रूप से अनेक हल हैं अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} \Rightarrow 2(a+b) = 3(a-b)$$

$$\Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$$

$$\Rightarrow 3b + 2b = 3a - 2a$$

$$\Rightarrow 5b = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 5b}$$

$$\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$$\Rightarrow 3(3a+b-2) = 7(a+b)$$

$$\Rightarrow 9a + 3b - 6 = 7a + 7b$$

$$\Rightarrow 9a - 7a + 3b - 7b - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2a - 4b - 6 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

समी ① से a का मान $5b$ में रखने पर

$$2(5b) - 4b - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 10b - 4b - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 6b - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 6b = 6 \Rightarrow b = \frac{6}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\text{समी. ①} \Rightarrow a = 5(1) = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 5}$$

(ii) k के किस मान के लिए, निम्न रेखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है ?

$$\boxed{3x + y = 1}, \quad \boxed{(2k-1)x + (k-1)y = (2k+1)}$$

$$3x + y - 1 = 0, \quad (2k-1)x + (k-1)y - (2k+1) = 0$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 3 & b_1 = 1 & c_1 = -1 \\ a_2 = 2k-1 & b_2 = k-1 & c_2 = -(2k+1) \end{array}$$

\therefore समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1} \neq \frac{-1}{-(2k+1)}$$

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1} \Rightarrow 3(k-1) = 2k-1$$

$$\Rightarrow 3k - 2k = -1 + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2}$$

उत्प-3 निम्न समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन तथा वृत्त गुणन विधियों से हल कीजिए ।

$$\boxed{8x + 5y = 9}, \quad \boxed{3x + 2y = 4}$$

$$\Rightarrow 8x + 5y = 9, \quad 3x + 2y = 4$$

$$\Rightarrow 8x + 5y - 9 = 0$$

$$3x + 2y - 4 = 0$$

$$\frac{x}{5(-4) - 2(-9)} = \frac{-9}{8(-4) - 3(-9)} = \frac{1}{9(2) - 3(5)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-20 + 18} = \frac{-9}{-32 + 27} = \frac{1}{16 - 15}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{-9}{-5} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{1}{1}, \quad \frac{y}{5} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -2}, \quad \boxed{y = 5}$$

प्रतिस्थापन विधि :-

$$3x + 2y = 4$$

$$2y = 4 - 3x$$

$$\Rightarrow y = \frac{4 - 3x}{2} = \textcircled{3}$$

समीकरण 1 में (4) का मान रखने पर →

$$8x + 5 \left(\frac{4-3x}{2} \right) = 9$$

$$\Rightarrow \frac{8x}{1} + \frac{20-15x}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{16x + 20 - 15x}{2} = 9$$

$$\Rightarrow x + 20 = 18 \Rightarrow x = 18 - 20$$

$$\boxed{x = -2}$$

समी. (3) →

$$y = \frac{4 - 3(-2)}{2}$$

$$y = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

उदाहरण-4 निम्न समस्याओं में दैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी भी गणितीय विधि से ज्ञात कीजिए ।

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष उस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है । जब एक विद्यार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, 1000 रु. अदा करने पड़ते हैं जबकि विद्यार्थी B को, जो 26 दिन भोजन करता है, 1180 रुपये अदा करने पड़ते हैं, नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल → माना नियत व्यय x रु तथा प्रतिदिन के भोजन का मूल्य y रुपये हैं ।

$$20 \text{ दिन} \rightarrow 1000 \text{ रुपये}$$

$$26 \text{ दिन} \rightarrow 1180 \text{ रुपये}$$

$$x + 20y = 1000 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + 26y = 1180 \quad \text{--- (2)}$$

$$x + 20y = 1000$$

$$x + 26y = 1180$$

$$\text{समी. (1) - (2)} \quad \underline{-6y = -180}$$

$$y = \frac{180}{6} = 30 \text{ रुपये} \Rightarrow \boxed{y = 30 \text{ रुपये}}$$

समीकरण 1 में (3) का मान रखने पर →

$$x + 20(30) = 1000$$

$$x + 600 = 1000$$

$$\boxed{x = 400 \text{ रुपये}}$$

नियत व्यय $x = 400$ रुपये

प्रतिदिन भोजन का मूल्य $y = 30$ रुपये

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{2}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाय जाता है और वह $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है ।

हल → माना भिन्न $\frac{x}{y}$ है ।

$$\text{अंक} = x, \quad \text{टेर} = y$$

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow (1)$$

$$\Rightarrow 3(x-1) = y$$

$$\Rightarrow 3x-3 = y \rightarrow (2)$$

$$\frac{x}{y+8} = \frac{1}{4} \rightarrow (2)$$

$$\Rightarrow 4x = y+8 \rightarrow (4)$$

समीकरण (3) से (4) का मान समीकरण (4) में रखने पर \rightarrow

$$4x = 3x-3+8$$

$$\Rightarrow 4x-3x = -3+8$$

$$\Rightarrow \boxed{x=5}$$

समीकरण (3) में x का मान रखने पर \rightarrow

$$y = 3(5)-3$$

$$= 15-3 = 12$$

$$\boxed{y=12}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} \text{ उत्तर}$$

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिले तथा असुद्ध उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिले तथा असुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटे तो यश 50 अंक अर्जित करता। टेस्ट में कितने प्रश्न थे?

हल— माना यश ने x प्रश्नों के सही उत्तर तथा y प्रश्नों के गलत उत्तर दिए।

$$3x - y = 40 \rightarrow (1)$$

$$4x - 2y = 50 \rightarrow (2)$$

समीकरण (1) $\times 2 \Rightarrow$

$$6x - 2y = 80 \rightarrow (3)$$

$$4x - 2y = 50$$

$$6x - 2y = 80$$

$$\begin{array}{r} 6x - 2y = 80 \\ - (4x - 2y = 50) \\ \hline 2x = 30 \end{array}$$

$$\text{समी. (2) - (1)} \rightarrow -2x = -30$$

$$x = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow \boxed{x=15}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर \rightarrow

$$3(15) - y = 40$$

$$\Rightarrow 45 - y = 40$$

$$\Rightarrow -y = 40 - 45$$

$$\Rightarrow -y = -5$$

$$\Rightarrow \boxed{y=5}$$

$$\Rightarrow \text{कुल प्रश्न} = x+y = 15+5 = 20$$

यश ने प्रश्नों के सही उत्तर दिए $x \Rightarrow 15$

यश ने प्रश्नों के गलत उत्तर दिए $y \Rightarrow 5$

$$\text{कुल प्रश्न} = 5+15 = 20$$

(iv) एक राजेमार्ग पर दो स्थान A और B, 100 Km की दूरी पर हैं। एक कार A तथा दूसरी कार B से एक ही समय चलना प्रारम्भ करती हैं। यदि वे कोरे भिन्न-भिन्न-चालों से एक ही दिशा में चलती हैं, तो वे 5 घण्टे पञ्चा मिलती हैं। यदि वे एक दूसरे की ओर चलती हैं तो वे 1 घण्टे में मिल जाती हैं। दोनों कारों की चाल ज्ञात करो।

हल -



$$x \text{ Km/h} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{सापेक्षिक चाल } (x-y) \text{ Km/h} \\ \text{समय} = 5 \text{ घण्टे} \\ \text{दूरी} = 100 \text{ km} \end{array}$$

$$\Rightarrow y \text{ Km/h} \Rightarrow 5 \text{ घण्टे}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{सापेक्षिक चाल} = (x+y) \text{ Km/h} \\ \text{समय} = 1 \text{ घण्टा} \\ \text{दूरी} = 100 \text{ Km} \end{array}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ घण्टा}$$

$$\boxed{\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}}$$

$$\boxed{\text{दूरी} = \text{चाल} \times \text{समय}}$$

$$100 = (x-y) \times 5$$

$$\frac{100}{5} = x-y$$

$$\Rightarrow \boxed{x-y=20} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$100 = (x+y) \times 1$$

$$\boxed{x+y=100} \rightarrow \textcircled{2}$$

$$x-y=20$$

$$x+y=100$$

$$2x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{2} = 60$$

$$\boxed{x = 60 \text{ Km/h}}$$

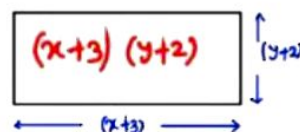
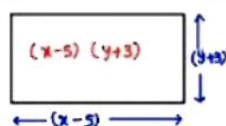
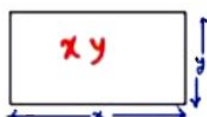
$$60+y=100$$

$$y=100-60$$

$$\boxed{y = 40 \text{ Km/h}}$$

(v) एक आयत का क्षेत्रफल 5 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लम्बाई 3 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लम्बाई 3 इकाई और चौड़ाई 2 इकाई बढ़ा दें तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल - माना आयत की लम्बाई = x m.
तथा चौड़ाई = y m.



$$\text{नया क्षेत्रफल} = \text{पुराना क्षेत्रफल} - 9$$

$$\Rightarrow (x-5)(y+3) = xy - 9$$

$$\Rightarrow xy + 3x - 5y - 15 = xy - 9$$

$$\Rightarrow 3x - 5y = -9 - 15$$

$$\boxed{3x - 5y = -6} \rightarrow (1)$$

$$\text{नया क्षेत्रफल} = \text{पुराना क्षेत्रफल} + 67$$

$$\Rightarrow (x+3)(y+2) = xy + 67$$

$$\Rightarrow xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 67 - 6$$

$$\Rightarrow \boxed{2x + 3y = 61} \rightarrow (2)$$

$$3x - 5y - 6 = 0$$

$$2x + 3y - 61 = 0$$

$$\frac{x}{(-5)(-61) - 3(-6)} = \frac{-y}{3(-61) - 2(-6)} = \frac{1}{3(3) - 2(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{305 + 18} = \frac{-y}{-183 + 12} = \frac{1}{9 + 10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{323} = \frac{-y}{-171} = \frac{1}{19}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{323} = \frac{1}{19} \Rightarrow x = \frac{323}{19} = 17 \Rightarrow \boxed{x = 17} \text{ मी.}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{171} = \frac{1}{19} \Rightarrow y = \frac{171}{19} = 9 \Rightarrow \boxed{y = 9} \text{ मी.}$$

अतः आयत की लम्बाई $x = 17$ मी.
आयत की चौड़ाई $y = 9$ मी.

उदाहरण - 14 समीकरणों के निम्न युग्म को हल कीजिए -

$$\boxed{\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13}, \quad \boxed{\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13, \quad \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

$$\text{माना } \frac{1}{x} = a \quad \text{तथा} \quad \frac{1}{y} = b$$

$$2a + 3b = 13 \quad - (1)$$

$$5a - 4b = -2 \quad - (2)$$

समीकरण (1) \Rightarrow

$$2a = 13 - 3b$$

$$\Rightarrow a = \frac{13-3b}{2} \rightarrow \textcircled{2}$$

समीकरण $\textcircled{2}$ में a का मान रखने पर \rightarrow

$$5\left(\frac{13-3b}{2}\right) - 4b = -2$$

$$\Rightarrow \frac{65-15b}{2} - 4b = -2$$

$$\Rightarrow \frac{65-15b-8b}{2} = -2$$

$$\Rightarrow 65-23b = -4$$

$$\Rightarrow -23b = -4-65 \Rightarrow -23b = -69$$

$$\Rightarrow b = \frac{69}{23} \Rightarrow \boxed{b=3}$$

समीकरण $\textcircled{3}$ में b का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow a = \frac{13-3(3)}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{a=2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{y} = b$$

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{1}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}}$$

उदाहरण-18 निम्न समीकरण युग्म को रेखिक समीकरणों के युग्म में बदलकर हल कीजिए।

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2, \quad \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2, \quad \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$$\text{माना } \frac{1}{x-1} = a \rightarrow \textcircled{1} \quad \text{तथा} \quad \frac{1}{y-2} = b \rightarrow \textcircled{2}$$

$$5a + b = 2 \rightarrow \textcircled{3}$$

$$6a - 3b = 1 \rightarrow \textcircled{4}$$

समीकरण $\textcircled{3} \times 3 \Rightarrow$

$$15a + 3b = 6$$

$$6a - 3b = 1$$

$$\hline 21a = 7$$

$$a = \frac{7}{21} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

समीकरण $\textcircled{3} \Rightarrow$

$$5\left(\frac{1}{3}\right) + b = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} + b = 2$$

$$\Rightarrow b = 2 - \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow b = \frac{6-5}{3} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

a एवं b के मान समी 2 में रखने पर \rightarrow

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 = x-1$$

$$\Rightarrow 3+1 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

$$3 = y-2$$

$$3+2 = y$$

$$\boxed{y = 5}$$

उदाहरण - 19 एक नाव 10 घण्टे में धारा के उतिकल 30 km तथा धारा के के अनुकूल 44 km जाती है। 13 घण्टे में वह 40 km धारा के उतिकल एवं 55 km धारा के अनुकूल जाती है। धारा की चाल तथा नाव की स्थिर पानी में चाल ज्ञात कीजिए।

हल -

$$\begin{array}{lcl} \text{30 km धारा के} & + & \text{44 km धारा के} \\ \text{उतिकल चला गया समय} & & \text{अनुकूल चला गया समय} \end{array} = 10 \text{ घण्टे}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{40 km धारा के} & + & \text{55 km धारा के} \\ \text{उतिकल चला गया समय} & & \text{अनुकूल चला गया समय} \end{array} = 13 \text{ घण्टे}$$

माना धारा की चाल x km/h तथा नाव की स्थिर पानी में चाल y km/h हैं।

धारा के उतिकल

$$\text{---} \Rightarrow x \text{ km/h}$$

$$\leftarrow y \text{ km/h} \text{---}$$

धारा के अनुकूल

$$\text{---} \Rightarrow x \text{ km/h}$$

$$\text{---} \Rightarrow y \text{ km/h}$$

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\text{माना } \frac{1}{x-y} = a \rightarrow \textcircled{3}$$

$$\text{तथा } \frac{1}{x+y} = b \rightarrow \textcircled{4}$$

समीकरण ① और ② में मान रखने पर \rightarrow

$$30a + 44b = 10 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$40a + 55b = 13 \rightarrow \textcircled{6}$$

$$\text{समीकरण } \textcircled{5} \rightarrow 30a = 10 - 44b \Rightarrow \boxed{a = \frac{10 - 44b}{30}} \rightarrow \textcircled{7}$$

समीकरण 6 में a का मान रखने पर \rightarrow

$$40 \left(\frac{10-44b}{3} \right) + 55b = 13$$

$$\Rightarrow \frac{40-176b}{3} + \frac{55b}{1} = 13$$

$$\Rightarrow \frac{40-176b+165b}{3} = 13$$

$$\Rightarrow 40-11b = 39$$

$$\Rightarrow -11b = 39-40$$

$$\Rightarrow -11b = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{11}}$$

समीकरण (7) \Rightarrow

$$a = \frac{10-44\left(\frac{1}{11}\right)}{30}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10-4}{30} \Rightarrow a = \frac{6}{30} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{5}}$$

समीकरण (3) व (4) में a व b का मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{1}{x-y} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{x-y=5} \rightarrow (8)$$

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

$$\boxed{x+y=11} \rightarrow (9)$$

समीकरण (8) + (9) \Rightarrow

$$x-y=5$$

$$x+y=11$$

$$\hline 2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2} \Rightarrow \boxed{x=8} \text{ km/h}$$

समी. (9) \Rightarrow

$$8+y=11$$

$$y=11-8$$

$$\Rightarrow \boxed{y=3} \text{ km/h}$$

प्रश्नावली - 3.6

प्रश्न 1 (i)

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6} \rightarrow \textcircled{2}$$

माना $\frac{1}{x} = a \rightarrow \textcircled{3}$ तथा $\frac{1}{y} = b \rightarrow \textcircled{4}$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = 2 \quad | \quad \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3a + 2b}{6} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2a + 3b}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{3a + 2b = 12} \rightarrow \textcircled{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{2a + 3b = 13} \rightarrow \textcircled{6}$$

$$\Rightarrow 2a = 13 - 3b$$

$$\boxed{a = \frac{13 - 3b}{2}} \rightarrow \textcircled{7}$$

समीकरण 6 से a का मान $\textcircled{5}$ में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow 3\left(\frac{13 - 3b}{2}\right) + 2b = 12$$

$$\Rightarrow \frac{39 - 9b}{2} + 2b = 12$$

$$\Rightarrow \frac{39 - 9b + 4b}{2} = 12$$

$$\Rightarrow 39 - 5b = 24$$

$$\Rightarrow -5b = 24 - 39$$

$$\Rightarrow -5b = -15$$

$$\Rightarrow b = \frac{-15}{-5} = 3$$

समी $\textcircled{7}$ से \Rightarrow

$$a = \frac{13 - 3(3)}{2} = \frac{13 - 9}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

समीकरण $\textcircled{3}$ एवं $\textcircled{4}$ से \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{y} = 3 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}}$$

(ii)

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2 \rightarrow (1) \quad \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1 \rightarrow (2)$$

माना $\frac{1}{\sqrt{x}} = a \rightarrow (3)$, तथा $\frac{1}{\sqrt{y}} = b \rightarrow (4)$

$$2a + 3b = 2 \rightarrow (5)$$

$$4a - 9b = -1 \rightarrow (6)$$

समीकरण (5) $\times 3 \Rightarrow$

$$6a + 9b = 6 \quad - (7)$$

$$4a - 9b = -1$$

$$\hline 10a = 5$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{10} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

समीकरण (3) से $\Rightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 3b = 2$

$$\Rightarrow 1 + 3b = 2$$

$$\Rightarrow 3b = 2 - 1$$

$$\Rightarrow 3b = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

समीकरण (3) एवं (4) से \rightarrow

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$\Rightarrow 4 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 3^2 = (\sqrt{y})^2$$

$$\Rightarrow 9 = y$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 9}$$

(iii)

$$\frac{4}{x} + 3y = 14$$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23$$

$$\frac{4}{x} + 3y = 14 \rightarrow (1)$$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23 \rightarrow (2)$$

माना $\frac{1}{x} = a \rightarrow (3)$

, तथा $y = b \rightarrow (4)$

$$4a + 8b = 14 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$3a - 4b = 23 \rightarrow \textcircled{6}$$

$$\Rightarrow 3a = 23 + 4b$$

$$\Rightarrow a = \frac{23 + 4b}{3} \rightarrow \textcircled{7}$$

समीकरण $\textcircled{5}$ में a का मान रखने पर \rightarrow

$$4\left(\frac{23 + 4b}{3}\right) + 8b = 14$$

$$\Rightarrow \frac{92 + 16b}{3} + 8b = 14$$

$$\Rightarrow \frac{92 + 16b + 24b}{3} = 14$$

$$\Rightarrow 92 + 40b = 42$$

$$\Rightarrow 40b = 42 - 92$$

$$\Rightarrow 40b = -50$$

$$\Rightarrow b = \frac{-50}{40} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{5}{4}}$$

समीकरण $\textcircled{6}$ से $\rightarrow a = \frac{23 + 4(-\frac{5}{4})}{3}$

$$\Rightarrow a = \frac{23 - 5}{3} \Rightarrow a = \frac{18}{3} = 6$$

$$\boxed{a = 6}$$

समीकरण $\textcircled{3}$ व $\textcircled{4}$ से \rightarrow

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}}$$

$$\boxed{y = -2}$$

(iv)

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2, \quad \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

माना $\frac{1}{x-1} = a \rightarrow 1$ तथा $\frac{1}{y-2} = b \rightarrow 2$

$$5a + b = 2 \rightarrow 3$$

$$6a - 3b = 1 \rightarrow 4$$

समीकरण 3 $\times 3 \Rightarrow$

$$15a + 3b = 6$$

$$6a - 3b = 1$$

$$\hline 21a = 7$$

$$a = \frac{7}{21} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

जमीकरण 3 \Rightarrow

$$5\left(\frac{1}{3}\right) + b = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} + b = 2$$

$$\Rightarrow b = 2 - \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow b = \frac{6-5}{3} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

a एवं b के मान समी 2 में रखने पर \rightarrow

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 = x-1$$

$$\Rightarrow 3+1 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

$$3 = y-2$$

$$3+2 = y$$

$$\boxed{y = 5}$$

(v)

$$\frac{7x-2y}{xy} = 5$$

$$\frac{8x+7y}{xy} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{7x}{xy} - \frac{2y}{xy} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{7}{y} - \frac{2}{x} = 5$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 5 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{8x}{xy} + \frac{7y}{xy} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{8}{y} + \frac{7}{x} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{7}{x} + \frac{8}{y} = 15 \rightarrow (2)$$

$$\text{माना } \frac{1}{x} = a \rightarrow (3) \quad \text{तथा } \frac{1}{y} = b \rightarrow (4)$$

$$-2a + 7b = 5 \rightarrow (3)$$

$$7a + 8b = 15 \rightarrow (4)$$

$$\Rightarrow 7b - 5 = 2a$$

$$\Rightarrow a = \frac{7b - 5}{2} \rightarrow (5)$$

a का मान समीकरण (4) में रखने पर \rightarrow

$$7\left(\frac{7b-5}{2}\right) + 8b = 15$$

$$\Rightarrow \frac{49b - 35}{2} + \frac{8b}{1} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{49b - 35 + 16b}{2} = 15$$

$$\Rightarrow 65b - 35 = 30$$

$$\Rightarrow 65b = 30 + 35$$

$$\Rightarrow 65b = 65$$

$$\Rightarrow b = \frac{65}{65} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\text{समी. (5) } \Rightarrow a = \frac{7(1) - 5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

समीकरण (3) एवं (4) से \rightarrow

$$\frac{1}{x} = 1 \quad \frac{1}{y} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1} \quad \boxed{y=1}$$

$$(vi) \quad \boxed{6x + 3y = 6xy}$$

$$\Rightarrow 6x + 3y = 6xy$$

$$\Rightarrow \frac{6x + 3y}{xy} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6x}{xy} + \frac{3y}{xy} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 6 \rightarrow (1)$$

$$\boxed{2x + 4y = 5xy}$$

$$\Rightarrow 2x + 4y = 5xy$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 4y}{xy} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{xy} + \frac{4y}{xy} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} + \frac{4}{x} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 5 \rightarrow (2)$$

माना $\frac{1}{x} = a \rightarrow (3)$ तथा $\frac{1}{y} = b \rightarrow (4)$

$$\Rightarrow 3a + 6b = 6$$

$$\Rightarrow 3(a + 2b) = 6$$

$$\Rightarrow a + 2b = \frac{6}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a + 2b = 2} \text{ --- (5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{4a + 2b = 5} \rightarrow (6)$$

समीकरण (6) - (5) \Rightarrow

$$4a + 2b = 5$$

$$\underline{a + 2b = 2}$$

$$3a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{3} = 1$$

समीकरण (5) से $\Rightarrow a + 2b = 2$

$$\Rightarrow 1 + 2b = 2$$

$$\Rightarrow 2b = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

समीकरण (3) व (4) से \rightarrow

$$\frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2}$$

(VII)

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \quad , \quad \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

माना $\frac{1}{x+y} = a \rightarrow (1)$ तथा $\frac{1}{x-y} = b \rightarrow (2)$

$$\Rightarrow 10a + 2b = 4$$

$$\Rightarrow 2(5a + b) = 4$$

$$\Rightarrow 5a + b = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{5a + b = 2} \rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{15a - 5b = -2} \rightarrow (4)$$

$$\Rightarrow b = 2 - 5a \rightarrow (5)$$

b का मान समीकरण (4) में रखने पर \rightarrow

$$\begin{aligned}
 15a - 5(2 - 5a) &= -2 \\
 \Rightarrow 15a - 10 + 25a &= -2 \\
 \Rightarrow 40a - 10 &= -2 \\
 \Rightarrow 40a &= -2 + 10 \\
 \Rightarrow 40a &= 8 \\
 \Rightarrow a &= \frac{8}{40} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{5}}
 \end{aligned}$$

समीकरण (5) से \rightarrow

$$\Rightarrow b = 2 - 5\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow b = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

समीकरण (1) एवं (3) से \rightarrow

$$\begin{array}{l|l}
 \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5} & \frac{1}{x-y} = \frac{1}{1} \\
 \boxed{5 = x+y} \rightarrow (6) & \boxed{1 = x-y} \rightarrow (7)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x + y = 5 \\
 x - y = 1 \\
 \hline
 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2}
 \end{array}$$

$$\boxed{x = 3}$$

समीकरण (6) से \rightarrow

$$\begin{aligned}
 5 &= 3 + y \\
 5 - 3 &= y \Rightarrow 2 = y
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$(ii) \quad \boxed{\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \quad , \quad \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{माना } \frac{1}{3x+y} = a \rightarrow (1) \text{ तथा } \frac{1}{3x-y} = b \rightarrow (2)$$

$$a + b = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{4a + 4b = 3} \rightarrow (3)$$

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{4a - 4b = -1} \rightarrow (4)$$

समीकरण (3) + (4) \Rightarrow

$$4a + 4b = 3$$

$$4a - 4b = -1$$

$$\hline 8a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{8} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

समी. ③ से \rightarrow

$$4\left(\frac{1}{4}\right) + 4b = 3$$

$$\Rightarrow 1 + 4b = 3$$

$$\Rightarrow 4b = 2$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

समीकरण ① व ② से \rightarrow

$$\frac{1}{3x+y} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{3x-y} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{3x+y=4} \rightarrow ⑤ \quad \Rightarrow \boxed{3x-y=2} \rightarrow ⑥$$

समीकरण ⑤ + ⑥ \rightarrow

$$3x+y=4$$

$$3x-y=2$$

$$\hline 6x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{6} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

समीकरण ⑤ से \rightarrow

$$3(1) + y = 4$$

$$3 + y = 4$$

$$y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

प्रश्न-20) रितु धारा के अनुकूल 2 घण्टे में 20 km तैर सकती है और धारा के उत्तिकूल 2 घण्टे में 4 km तैर सकती है। उसके स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

[अनुकूल]

रितु $\Rightarrow x$ km/h

$\Rightarrow y$ km/h

चाल = $(x+y)$ km/h

$$\boxed{\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}}$$

$$2 = \frac{20}{x+y}$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{20}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y=10} \rightarrow ①$$

उत्तिकूल

रितु $\Rightarrow x$ km/h

x km/h \leftarrow

चाल $(x-y)$ km/h

$$2 = \frac{4}{x-y}$$

$$\Rightarrow x-y = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x-y=2} \rightarrow ②$$

समीकरण ① + ② \Rightarrow

$$\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x - y = 2 \\ \hline \end{array}$$

$$2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} \Rightarrow \boxed{x = 6} \text{ km/h}$$

समीकरण ① \rightarrow

$$\Rightarrow 6 + y = 10$$

$$\Rightarrow y = 10 - 6 \Rightarrow \boxed{y = 4} \text{ km/h}$$

(ii) 2 महिलाएँ एवं 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साघ-साघ 4 दिन में पूरा कर सकते हैं, जबकि 3 महिलाएँ एवं 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए इसी कार्य को करने में एक अकेली महिला कितना समय लेगी। पुनः इसी कार्य को करने में पुरुष कितना समय लेगा।
हल -

2 महिलाएँ + 5 पुरुष \rightarrow 4 दिन

3 महिलाएँ + 6 पुरुष \rightarrow 3 दिन

माना अकेली महिला कसीदे के कार्य को करने में x दिन का समय लेती है तथा अकेला पुरुष उसी कार्य को करने में y दिन का समय लेता है।

$$\begin{array}{l} 1 \text{ महिला का } 1 \text{ दिन का काम} = \frac{1}{x} \\ 1 \text{ पुरुष का } 1 \text{ दिन का काम} = \frac{1}{y} \end{array}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \quad \text{--- ①}$$

$$\text{माना } \frac{1}{x} = a \rightarrow \text{③}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{3} \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{1}{y} = b \rightarrow \text{④}$$

$$2a + 5b = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{8a + 20b = 1} \quad \text{--- ⑤}$$

$$3a + 6b = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{9a + 18b = 1} \quad \text{--- ⑥}$$

$$\Rightarrow 8a = 1 - 20b$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1 - 20b}{8}} \quad \text{--- ⑦}$$

a का मान समीकरण ⑥ में रखने पर

$$\Rightarrow 9\left(\frac{1 - 20b}{8}\right) + 18b = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9 - 180b}{8} + \frac{144b}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9 - 180b + 144b}{8} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9 - 36b &= 8 \\ \Rightarrow -36b &= 8 - 9 \\ \Rightarrow -36b &= -1 \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

समीकरण (7) में

$$a = \frac{1 - \frac{20}{36}}{8} \Rightarrow a = \frac{36 - 20}{36 \left(\frac{8}{1}\right)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{16}{36} \times \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

समीकरण (3) एवं (4) से >

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \quad \text{और} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{x = 18} \text{ दिन} \quad \boxed{y = 36} \text{ दिन}$$

(ii) रूठी 300 km दूरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 km रेलगाड़ी द्वारा तथा गेब बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं। यदि वह 100 km रेलगाड़ी से तथा गेब बस से यात्रा करे तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं रेलगाड़ी एवं बस की क्रमशः चाल ज्ञात कीजिए।
हल - माना रेलगाड़ी की चाल x km/h तथा बस की चाल y km/h है।

$$\begin{array}{l} 60 \text{ km रेलगाड़ी में} \\ \text{लगा समय} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 240 \text{ km बस} \\ \text{में लगा समय} \end{array} = 4 \text{ घंटे}$$

$$\begin{array}{l} 100 \text{ km रेलगाड़ी} \\ \text{में लगा समय} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 200 \text{ km बस} \\ \text{में लगा समय} \end{array} = 4 \text{ घंटे } 10 \text{ मिनट}$$

$$\Rightarrow \left(4 + \frac{10}{60}\right) \text{ घंटे} = \frac{25}{6} \text{ घंटे}$$

समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$\frac{60}{x} + \frac{240}{y} = 4, \quad \frac{100}{x} + \frac{200}{y} = \frac{25}{6}$$

$$\text{माना } \frac{1}{x} = a \rightarrow \textcircled{1} \quad \text{तथा} \quad \frac{1}{y} = b \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow 60a + 240b = 4$$

$$\Rightarrow \frac{60a}{4} + \frac{240b}{4} = 1$$

$$\Rightarrow 15a + 60b = 1$$

$$\Rightarrow 15(a + 4b) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a + 4b = \frac{1}{15}} \rightarrow \textcircled{3}$$

$$100a + 200b = \frac{25}{6}$$

$$600a + 1200b = 25$$

$$\frac{600a}{25} + \frac{1200b}{25} = 1$$

$$24a + 48b = 1$$

$$24(a + 2b) = 1$$

$$\boxed{a + 2b = \frac{1}{24}} \rightarrow \textcircled{4}$$

समीकरण ③-④ \Rightarrow

$$a + 4b = \frac{1}{15}$$

$$a - 2b = \frac{24}{360}$$

$$\frac{a + 4b}{a - 2b} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{24}{360}} \Rightarrow 2b = \frac{24 - 15}{360}$$

$$\Rightarrow 2b = \frac{9}{360} \Rightarrow 2b = \frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{80} \text{ km/h}}$$

b का मान समीकरण ④ में रखने पर \rightarrow

$$a = 2\left(\frac{1}{80}\right) = \frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{40} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{24} - \frac{1}{40} \Rightarrow a = \frac{40 - 24}{960} = \frac{16}{960}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{60}}$$

समीकरण ① एवं ② से \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 60 \text{ km/h}}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$$

$$\boxed{y = 80 \text{ km/h}}$$

अतः रेलगाड़ी की गति $x = 60 \text{ km/h}$

जल की गति $y = 80 \text{ km/h}$